

Indhold

Matematik - hvad bruger man det til?	2
Blood spatter Trigonometry	3
Praktisk	3
Øvelse 1:	5
Øvelse 2:	7
Trigonometri	8
Fra folkeskolen.....	8
Øvelse 3:	8
Pythagoras læresætning.....	8
Opgave 1:	10
Opgave 2:	10
Det matematisk argument - beviset.....	10
Det kinesiske bevis:	11
Ligedannede og ensvinklede.....	13
Opgave 3:	15
Opgave 4:	15
De tre trigonometriske funktioner.....	15
Sinus og cosinus til en vinkel:.....	16
De tre trigonometriske funktioner set i forhold til en retvinklet trekant.....	17
Brug i praksis	20
Opgave 5:	23
Opgave 6:	24
Opgave 7:	24
Opgave 8:	24
Opgave 9:	24
Opgave 10:	25
Vender tilbage til Blood spatter trigonometry	25
Vilkårlige trekanter.....	26
Trekantskonstruktion.....	27
Hvad er kravet til den skriftlige eksamen?.....	29

Opgave 11:	33
Opgave 12:	34
Opgave 13:	34
Opgave 14:	35
Supplerende stof - triangulering og sinusrelationen.	35
Lidt historisk indføring.	35
Danmarkskortet ledet af Thomas Bugge.....	35
Øvelse 4.....	37
Mount Everest -Den store Kortlægning af Indien.....	37
Øvelse 5.....	38
Vilkårlig trekant - sinusrelationen.....	39
Opgave 15:	40
Opgave 16:	40
Opgave 17:	41
Bevis for sinusrelationerne.....	41
Wordmat.....	42

Matematik - hvad bruger man det til?

Ofte går elever rundt med spørgsmålet ”**Matematik, hvad bruger man det til?**”. Svaret på spørgsmålet er ”**rigtig meget**”. Jeres hverdag kan simpelthen ikke fungere uden matematik, men ofte vil det for mange være i det ”skjulte” at matematikken bruges.

Når I søger på google, ligger der nogle matematiske algoritmer bag som sikre at søgningen fungerer og giver jer relevante henvisninger til hjemmesider.

Når I bruger google-maps, så bruges matematikken til at stedfæste hvor I er henne, hvor I bevæger jer hen og hvor hurtig det går.

Når en kriminaltekniker skal efterforske et mord, bruges matematikken til DNA-analysen, sandsynligheden for at den pågældende anklaget kan være morderen, hvor en såret eller myrdet er blevet ramt i gerningsøjeblikket osv.

Man kunne blive ved. Listen af områder hvor matematikken bruges er næsten uendelig lang.

Men det havde I måske allerede fået at vide af jeres matematiklærer og stod stadig tilbage med en skepsis. Derfor griber vi fat i én af de ovennævnte eksempler.

Vi skal til at kigge på det som på engelsk kaldes ”*Blood spatter Trigonometry*” (på dansk, blodsplat trigonometri).

Det er et felt inden for politiet, mere præcist kriminalteknisk afdeling, hvor man bruger matematik til at blive klog på hvor blodpletter stammer fra. Altså hvor i et rum og i hvilken højde blodet er kommet fra.

Blood spatter Trigonometry

Vi vil starte med at se på ”*Blood spatter Trigonometry*” praktisk og indføre lidt matematik undervejs som bare bliver brugt. Efterfølgende gribes fat i det matematiske emne Trigonometri hvor teorien bag det matematiske gennemgås.

Praktisk

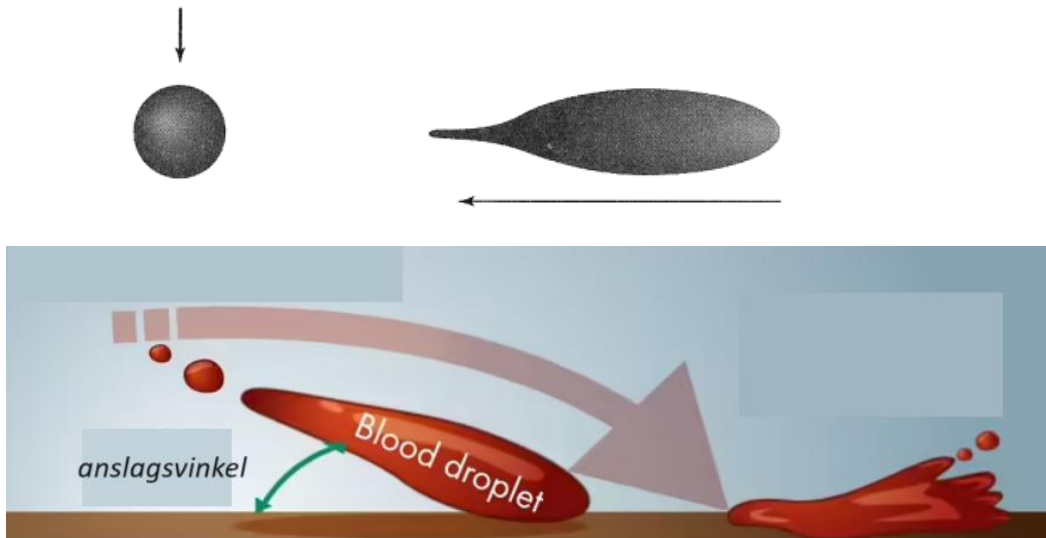


Bloodspatter trigonometry bliver kort præsenteret i den amerikanske tv-serie Numb3rs sæson 5 afsnit 6 (Magic show) 10:55-12:09. Og Dexter i serien af samme navn er blodspatter expert. <https://www.youtube.com/watch?v=4zQvTaMxBXg>

Når der er sket en alvorlig forbrydelse som bl.a. mord skal det kriminelle område altid gennemgås af en kriminaltekniker (specialuddannelse inden for politiet).

En af deres opgaver er at fastsætte hvor i et givent rum bloddråber stammer fra.

Det første de skal bruge, er viden om selve bloddråben.



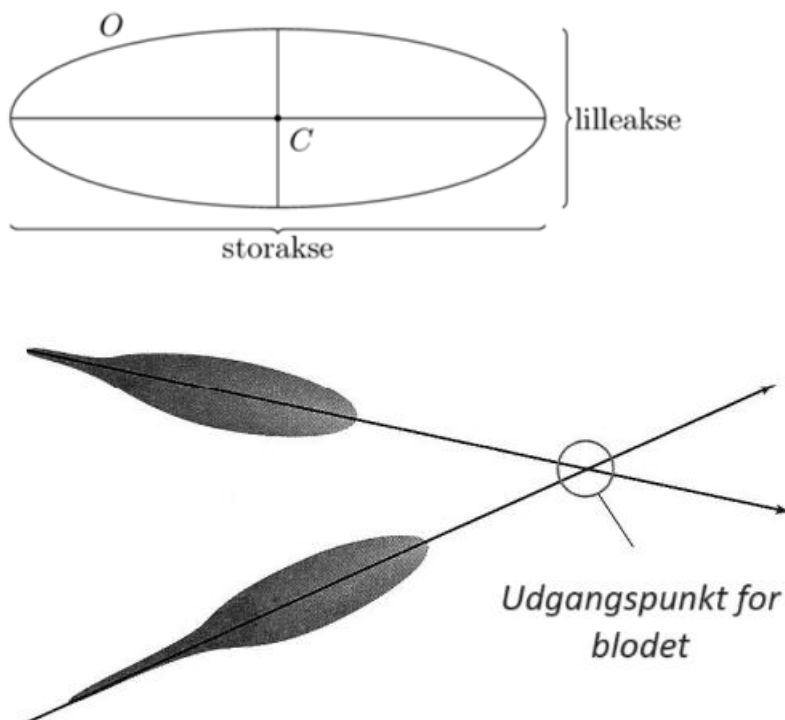
Hvis en dråbe med blod falder ned direkte oppefra, så vil dråben blive noget nær fuldstændig cirkulær når den rammer jorden. Men hvis dråben rammer jorden skævt, så vil den snarere blive aflang og blive ellipseformet. Det sidste er ofte tilfældet.

Nu kan kriminalteknikeren ud fra tre enkelte principper gennemskue hvor dråberne stammer fra.

Det første der skal gennemskues er, hvor i gulvplanet de stammer fra.

Det gøres ved at tegne streger gennem midten, på langs, af den ellipseformet dråbe.

Det man matematisk ville kalde storaksen:

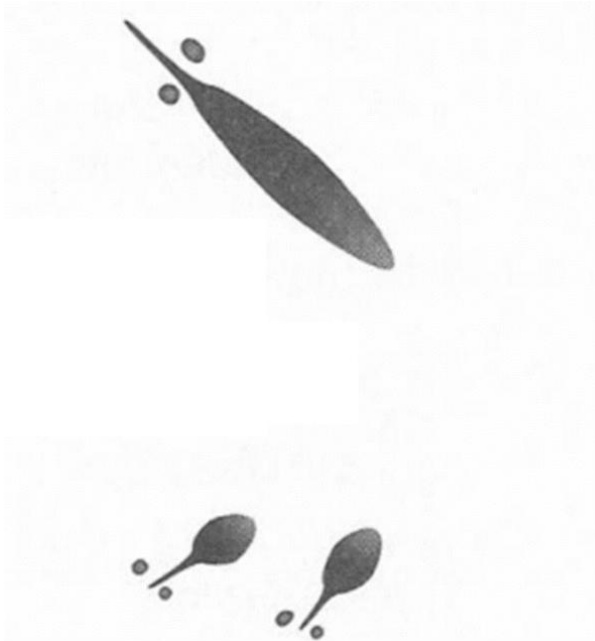


Man fører stregerne videre.

Dette gøres for en hel række af blodpletterne og der hvor stregerne mødes er udgangspunktet for blodet.

Øvelse 1:

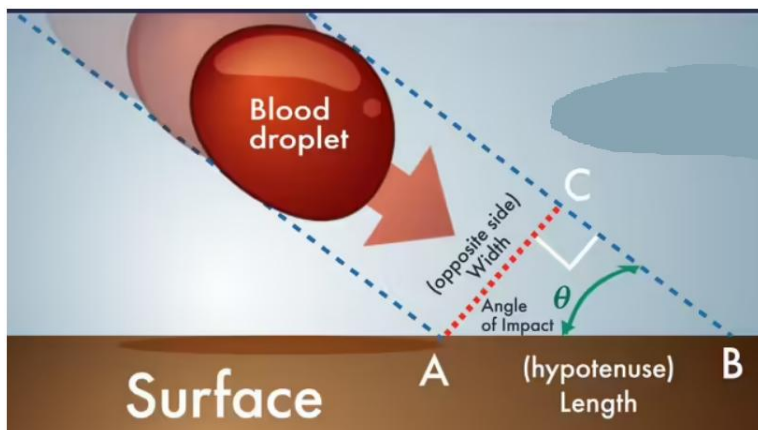
Hvor stammer blodet fra? Tegn streger som vist på ovenstående figur og gennemskue hvorfra blodet stammer fra.



Næste trin er at afgøre i hvilken højde blodet stammer fra.

Som nævnt tidligere så vil bloddråber som rammer en overflade ofte blive ellipseformet. Vi kan bruge forholdet mellem lille-og storaksen til at bestemme vinklen hvorved dråben ramte jorden. Hvorfor, vendes der tilbage til i teori-afsnittet.

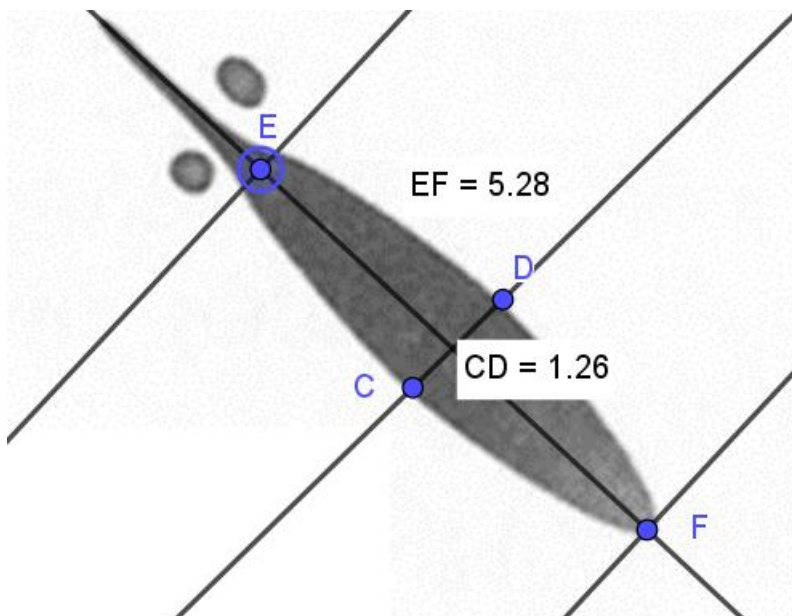
Men lad os allerede nu røbe svaret lidt ved at vise dette billede.



Man måler altså længden af lille-aksen og store-aksen og udregner deres forhold:

$$\frac{\text{lille akse}}{\text{store akse}}$$

Vi bruger figuren fra forrige side:



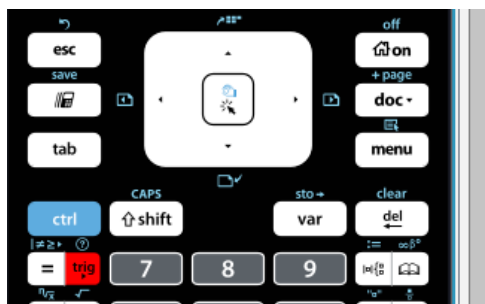
Forholdet er derfor:

$$\frac{1,26}{5,28} \approx 0,2386363636364$$

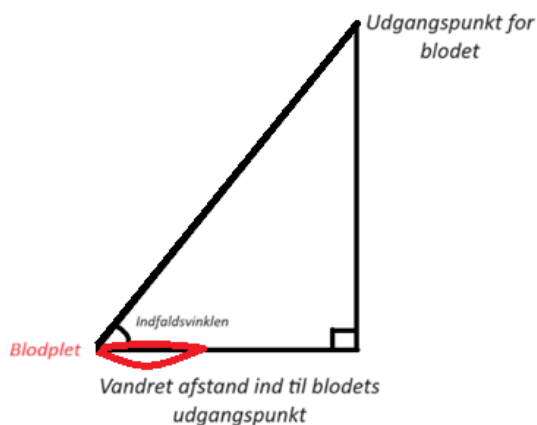
Nu skal vi bruge en funktion som I er stødt på i folkeskolen. I skal ikke forstå den på nuværende tidspunkt, I skal bare bruge den.

$$\sin^{-1}(0,2386363636364) = 13,80607141532^{\circ} \approx 13,81^{\circ}$$

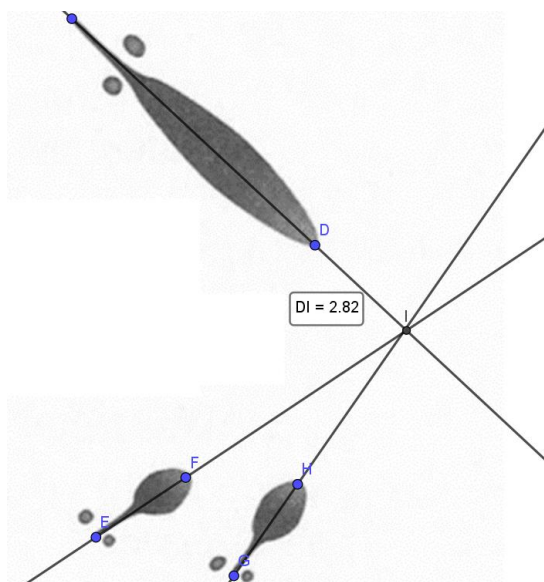
På nspire er $\sin^{-1}$ til at finde under trig



Nu har vi dråbens indfaldsvinkel og er nu klar til at udregne selve højden for bloddråbens udgangspunkt som er sidste princip.



Vi måler afstanden fra det punkt, hvor vi har bestemt vinklen og ind til skæringspunktet.



Afstanden er 2,82 cm men grundet målestoksforhold skal der ganges med 200.

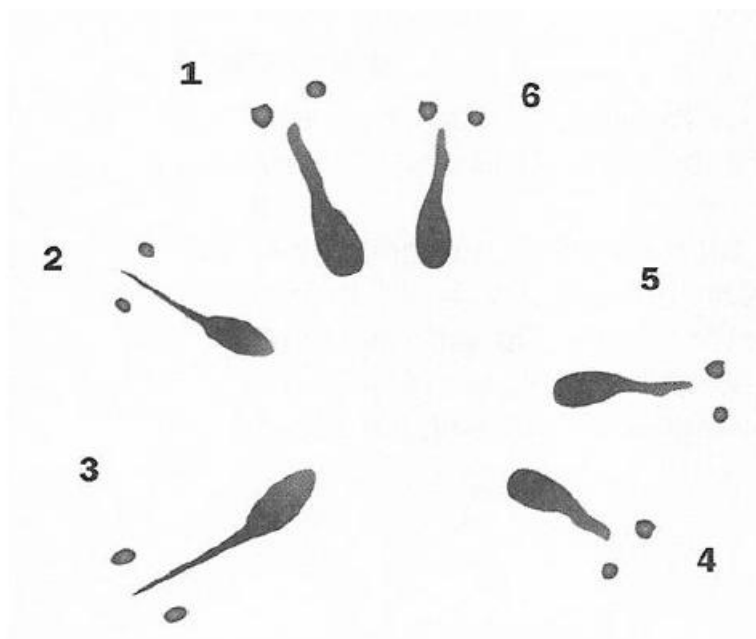
Vi bruger nu endnu en funktion i allerede kender, men ikke behøver at forstå allerede nu.

$$højde = \tan(13,81) \cdot 2,82 \cdot 200 = 564 \cdot \tan(13,81) \approx 138,6360667898$$

Vi kan derfor konkludere, at blodet er kommet fra ca. 1,39 meters højde.

Øvelse 2:

Prøv nu at gøre det samme med denne situation:



Brug blodplet 3 til at bestemme højden og brug samme målestok som før.

Det var ét autentisk eksempel på brug af matematik i virkeligheden.

Nu er det blevet tid til at kigge på teorien bag.

Trigonometri

Fra folkeskolen

Trigonometri betyder trekantsmåling, men vi bruger det i betydningen trekantsberegning.

Fra folkeskolen har I en masse vigtige begreber med jer, men kan I huske dem?

Retvinklet trekant, Stumpvinklet trekant, spidsvinklet trekant, ligebenet trekant, ligesidet trekant, midtnormal, højde, grundlinje, vinkelhalveringslinje, median, hypotenuse, katete, modstående side(katete), hosliggende side(katete), mellemliggende vinkel.

Øvelse 3:

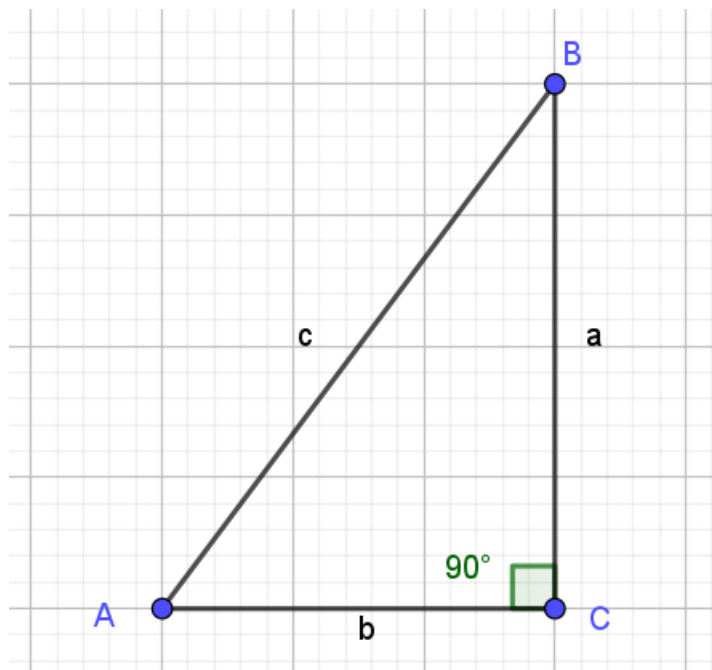
Lav en tegning til alle de ovenstående begreber.

Pythagoras læresætning

Desuden har I lært om Pythagoras sætning som med bogstaver siger:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

a og b repræsenterer kateterne, altså de korte sider, i en retvinklet trekant og c hypotenusen, den lange ”skrå” side.



Det er vigtigt at huske på at vinkler skrives med store bogstaver og sider med små bogstaver.

a vil altid stå "modsat" A og det samme gælder for de andre sider/vinkler.

Vi kan altid bruge sætningen når vi kender to sider og skal bestemme den sidste side.

Vi kan støde på to tilfælde:

- Vi kender begge kateter og skal bestemme hypotenusen.
- Vi kender en katete, hypotenusen og skal bestemme den sidste katete.

Eks. vi kender $a = 5$ og $b = 12$ og skal bestemme c (1.tilfælde).

$$5^2 + 12^2 = c^2$$

$$25 + 144 = c^2$$

$$169 = c^2$$

$$c = \sqrt{169} = 13$$

Eks. vi kender $a = 6$ og $c = 10$ og skal bestemme b (2.tilfælde).

$$6^2 + b^2 = 10^2$$

$$b^2 = 10^2 - 6^2$$

$$b^2 = 100 - 36$$

$$b^2 = 64$$

$$b = \sqrt{64} = 8$$

(det er ligegyldigt om det er a eller b Du kender, princippet er det samme for begge).

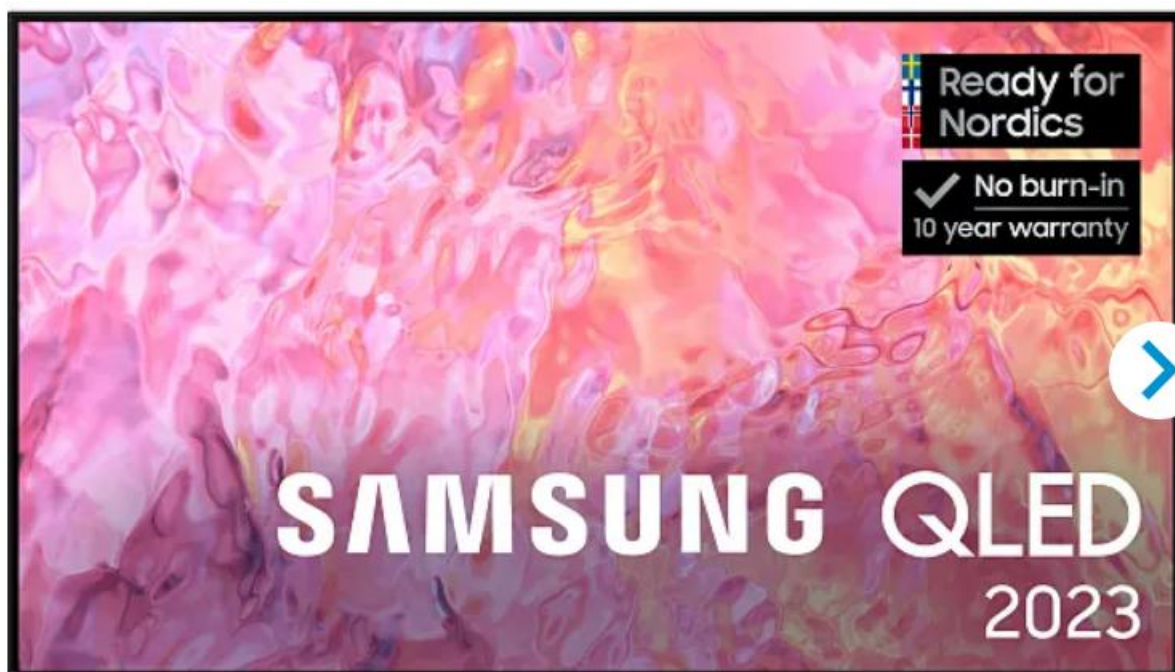
Opgave 1:

Udfyld de tomme felter.

Du ved at vinklen C er retvinklet.

a	6		5
b	8	7	
c		25	13

Opgave 2:



Du skal købe nyt tv og ønsker at finde ud af om fjernsynet kan hænge på din væg.

Du kigger på et 65 tommer tv (svarende til 165.10 cm) og ved at det er 145,09 cm i bredden. Hvor højt er dette tv når tommer angives for diagonalen?

Det matematisk argument - beviset.

Vi skal nu se på, hvordan man i matematik argumentere (**gør rede**) for en sætning (påstand).

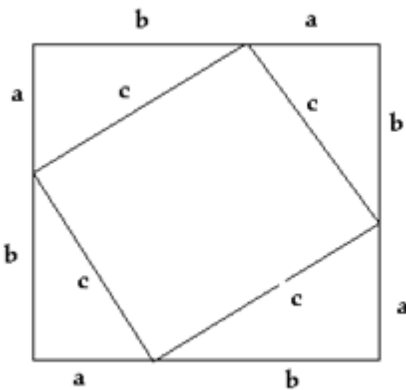
Vi skal bevise Pythagoras sætning.

Der findes virkelig mange beviser for Pythagoras sætning, her er ét af disse.

Beviset kaldes det kinesiske bevis.

Det kinesiske bevis:

Vi starter med at danne 4 ens retvinklede trekanter og placerer dem som det ses af skitsen:



Vi får dannet et stort kvadrat, idet alle sider er lige lange $(a + b)$ og hvert hjørne består af en ret vinkel ($\angle C$).

Arealet af dette kvadrat er:

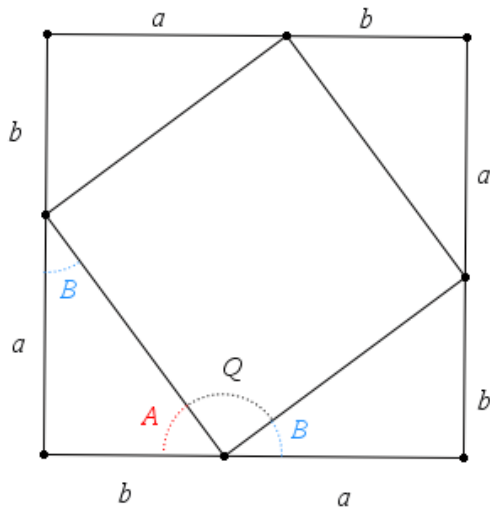
$$\begin{aligned} Areal_{store\ kvadrat} &= (a + b) \cdot (a + b) = (a + b)^2 \\ &= a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b \\ &= a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b \end{aligned}$$

Vi kommer senere på året mere ind på hvordan vi ganger parenteser sammen. Så bare rolig, hvis Du ikke kan det endnu.

Vi betragter nu det "indre" af det store kvadrat.

Det består af 4 ens retvinklede trekanter og en figur, som ser ud til at være et kvadrat.

Hver af siderne i det påstået kvadrat er lige lange (c) og vinklen må være 90° , fordi:



Summen i en trekant er 180° .

Hver af de 4 ens trekanter er retvinklede, derfor må:

$$A + B = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

Vi ved, at:

$$\begin{aligned} Q + A + B &= 180^\circ \\ Q &= 180^\circ - (A + B) \end{aligned}$$

Q må derfor være:

$$Q = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

De andre vinkler følger af samme argument.

Vi kan derfor konkludere, at der er tale om et (lille) kvadrat.

Arealet af det store kvadrat kan altså også udregnes som:

$$\begin{aligned} & \text{areal}_{\text{lille}} + 4 \cdot \text{areal}_{\text{trekant}} \\ \text{Areal}_{\text{store}} &= c^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot b = c^2 + 2ab \end{aligned}$$

Vi har betragtet arealet af samme figur bare på to forskellige måder, derfor må der gælde, at:

$$c^2 + 2ab = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Beviset kan ses som film på dette link

[Det kinesiske bevis for Pythagoras-20190617_073043.mp4](#)

Ligedannede og ensvinklede

Vi fortsætter med begreber fra folkeskolen - Begreberne **ligedannede** og **ensvinklede**.

Hvornår er to figurer ligedannede? Det er de når de har samme form.

Men de behøver ikke have samme størrelse - Vi kan forstørre/formindske dem så de dækker hinanden.

Kan Du/I nævne nogle geometriske figurer, som altid er ligedannede?

Kvadratet og cirklen er eksempler på figurer som altid er ligedannede.

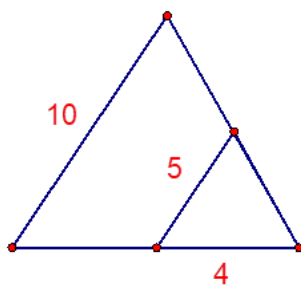
Hvad må der gælde om ensvinklede trekanter?

De er altid ligedannede. Vi kan derfor konkludere, at ensvinklede trekanter også er ligedannede.

Vi kan derfor altid komme fra den ene trekant til den anden trekant ved at gange med en faktor k (formindske/forstørre), også kaldet **forstørrelses-eller formindskelses-faktoren**.

Ligeledes kan man sige, at ligedannede/ensvinklede trekanter har samme indre forhold.

Vi betragter nu to ensvinklede trekanter som derved også er ligedannede.



Vi ønsker at bestemme den lange grundlinje, svarende til den korte grundlinje på 4.

Det kan vi gøre på to måder.

- Enten ved at bruge **samme indre forhold**

- Eller **forstørrelsesfaktoren**

Metode 1:

Forholdet mellem siderne 4 og 5 skal svare til forholdet mellem den ukendte side og 10.

$$\frac{4}{5} = \frac{ukendt}{10}$$

Vi løser denne ligning.

$$\frac{4}{5} \cdot 10 = ukendt$$

$$8 = ukendt$$

Senere på året kigger vi på, hvordan ligninger løses så hvis du ikke kan løse ligningen på nuværende tidspunkt, så bare rolig.

Metode 2:

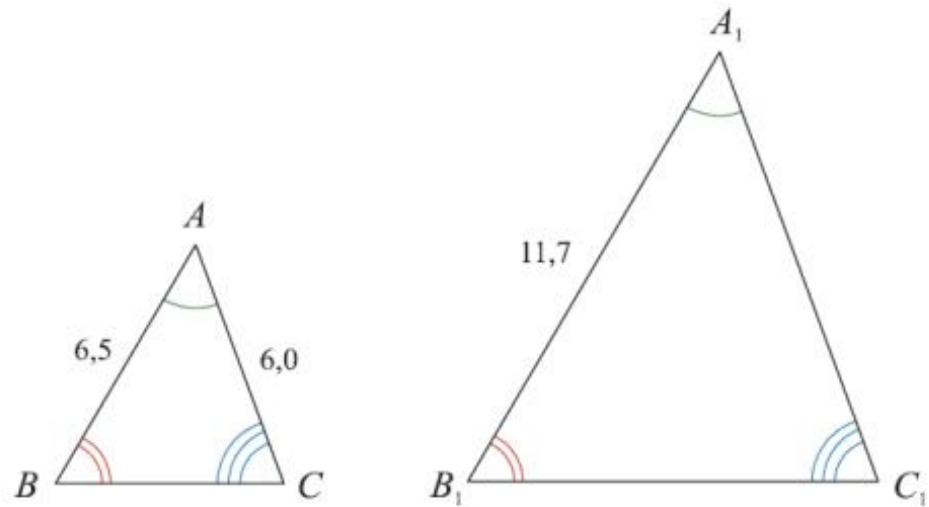
Her bestemmes først forstørrelsesfaktoren k .

$$k = \frac{10}{5} = 2$$

Den lange side må derfor være:

$$4 \cdot 2 = 8$$

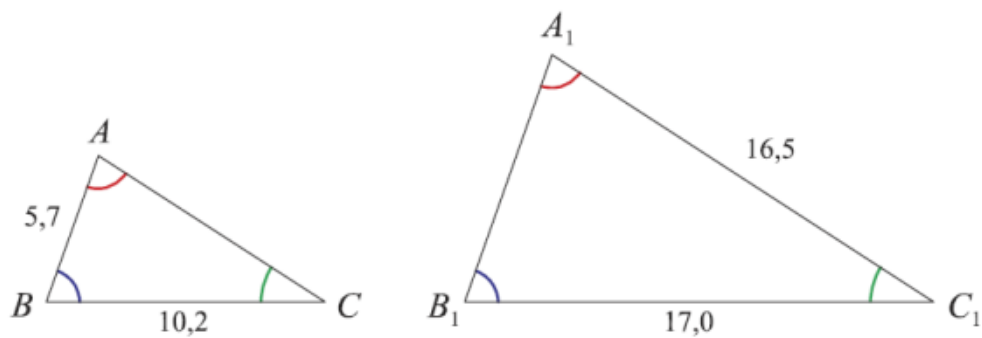
Opgave 3:



Figuren viser to ensvinklede trekanter ABC og $A_1B_1C_1$.
Nogle af målene fremgår af figuren.

- a) Bestem længden af siden A_1C_1 .

Opgave 4:



Figuren viser to ensvinklede trekanter ABC og $A_1B_1C_1$. Nogle af målene fremgår af figuren.

- a) Bestem længden af hver af siderne A_1B_1 og AC .

De tre trigonometriske funktioner

En sidste ting I har med fra folkeskolen, er de tre trigonometriske funktioner:
Cosinus, sinus og tangens til en vinkel.

Men måske/måske ikke har I bare set dem på formen:

$$\sin(A) = \frac{a}{c} = \frac{\text{modstående katete}}{\text{hypotenusen}}$$

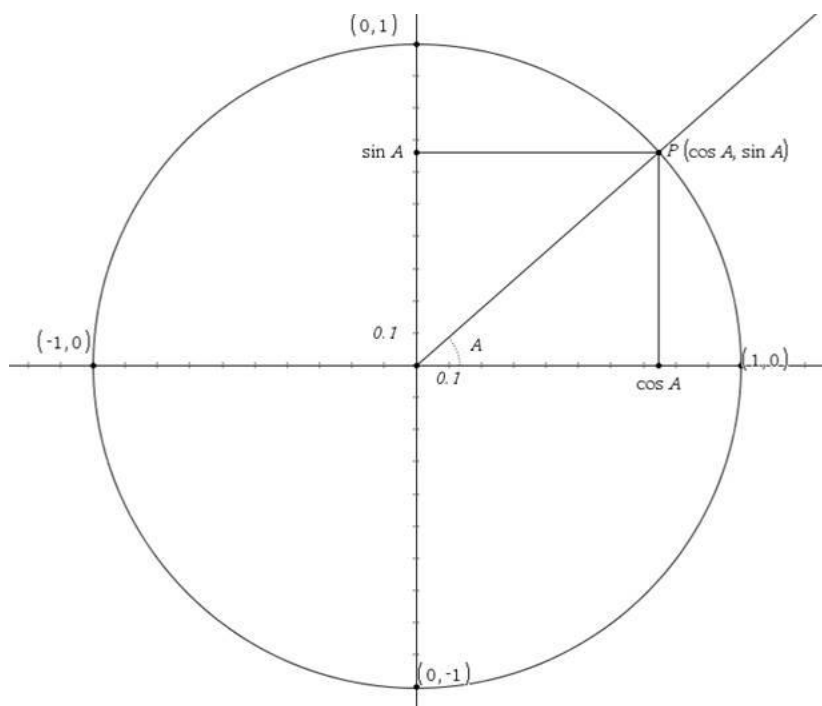
$$\cos(A) = \frac{b}{c} = \frac{\text{hosliggende katete}}{\text{hypotenusen}}$$

$$\tan(A) = \frac{a}{b} = \frac{\text{modstående katete}}{\text{hosliggende katete}}$$

Lad os gå i dybden med de rigtige definitioner.

Sinus og cosinus til en vinkel:

Vi tager udgangspunkt i enhedscirklen, altså cirklen med radius 1. Vi placerer denne i et koordinatsystem således at centrum af cirklen ligger i origo (0,0). Vi har desuden en vinkel A med toppunkt i origo og med højre ben ud af x-aksens positive del. Vinklens venstre ben skærer enhedscirklen i et punkt P, kaldet vinklens retningspunkt.



Sinus og cosinus til en vinkel defineres på følgende måde:

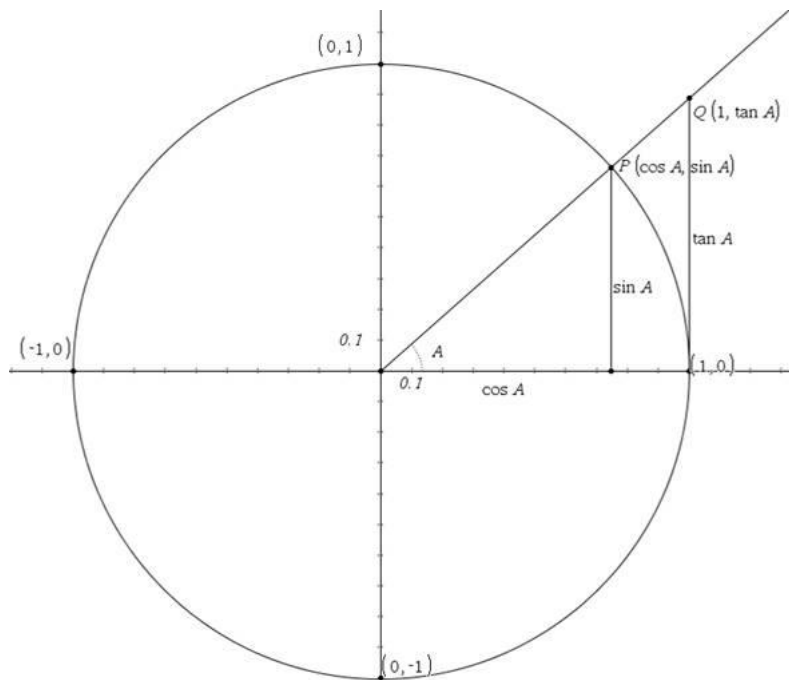
Cosinus til en vinkel A er x-koordinaten til retningspunktet P, mens sinus til en vinkel A er y-koordinaten til retningspunktet P.

Hvad er sinus og cosinus til 90 grader? Til 0 grader?

Læg mærke til, at sinus og cosinus som udgangspunkt ikke har noget med trekanter at gøre. De er et koordinatsæt.

Nu til tangens til en vinkel.

Navnet tangens kommer af, at tangens til en retningsvinkel A er y -værdien for skæring med tangenten.

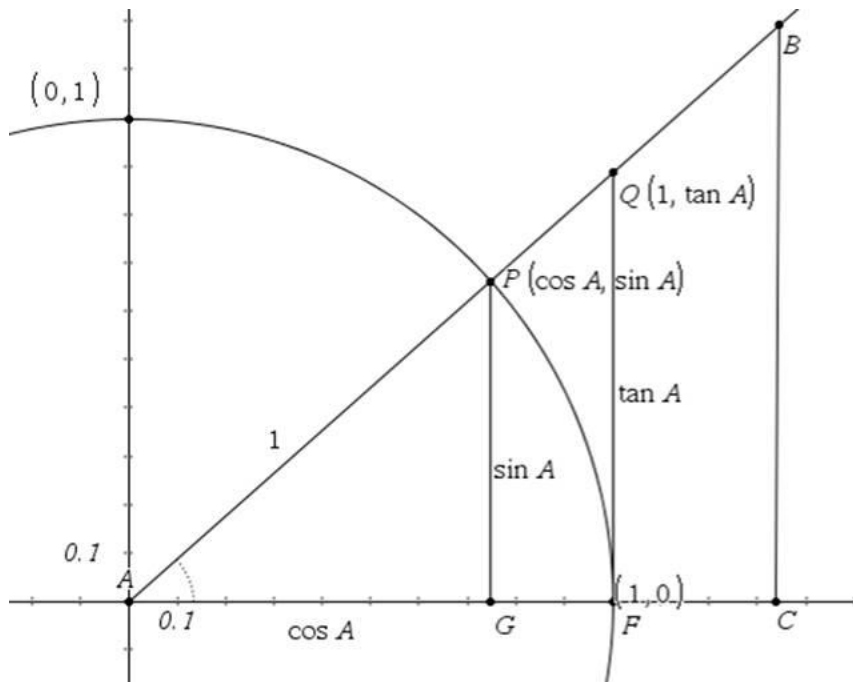


Altså den cirkeltangent som går gennem punktet $(1,0)$. Den vil være parallel med y -aksen.

Nu kobler vi det til retvinklede trekanter.

De tre trigonometriske funktioner set i forhold til en retvinklet trekant

Vi tager udgangspunkt i den retvinklede prototype, hvis hypotenuse er 1. For alle retvinklede trekanter er ligedannet med denne.



Vi ved pr. definition at:

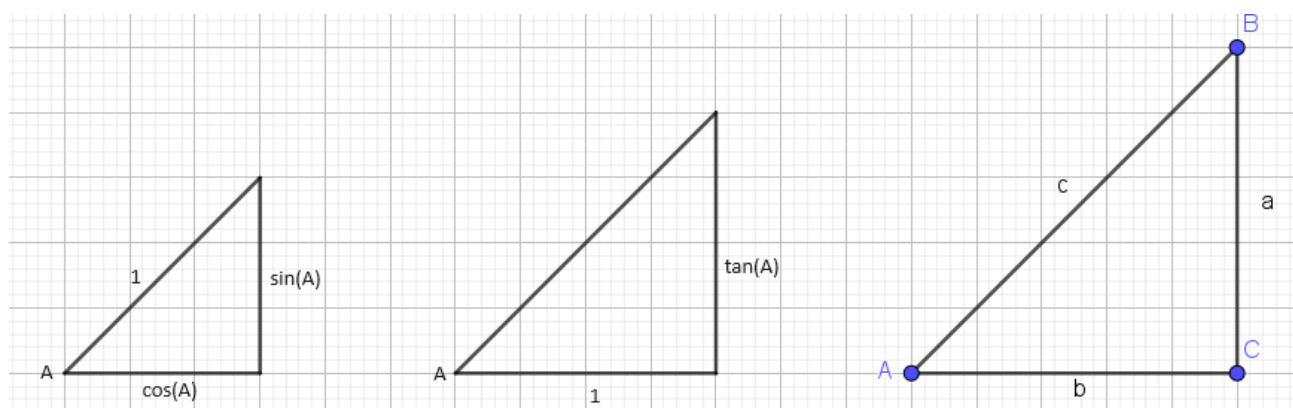
$$|AG| = \cos A, |PG| = \sin A \text{ \& } |AP| = 1$$

Trekant APG, trekant AQF og trekant ABC er ensvinklede (alle tre trekanter deler vinklen A, de er alle retvinklede og har derfor den sidste vinkel tilfælles) og derved ligedannede, så deres sider er proportionale og har samme indre forhold.

Vi kan nu vælge at gå "vejen med samme indre forhold" eller "forstørrelsesfaktor".

Vi vælger forstørrelsesfaktor.

Vi betragter altså disse tre trekanter (de ovenstående trekanter delt ud)



Forholdet (forstørrelsesfaktoren) mellem trekant 1 og trekant 3 må være:

$$k = \frac{c}{1} = c$$

Derfor må der gælde, at:

$$c \cdot \sin(A) = a$$

$$\sin(A) = \frac{a}{c}$$

$$c \cdot \cos(A) = b$$

$$\cos(A) = \frac{b}{c}$$

Forholdet mellem trekant 2 og 3 er:

$$k = \frac{b}{1} = b$$

Derfor må der gælde, at:

$$b \cdot \tan(A) = a$$

$$\tan(A) = \frac{a}{b}$$

Fordi a er den modstående katete i forhold til vinkel A , b den hosliggende katete og c hypotenusen i $\triangle ABC$ så kan vi skrive:

$$\sin(A) = \frac{a}{c} = \frac{\text{modstående katete}}{\text{hypotenusen}}$$

$$\cos(A) = \frac{b}{c} = \frac{\text{hosliggende katete}}{\text{hypotenusen}}$$

$$\tan(A) = \frac{a}{b} = \frac{\text{modstående katete}}{\text{hosliggende katete}}$$

Som en lille ekstra kommentar, så vil man se at mange bøger definere

$$\tan(A) = \frac{\sin(A)}{\cos(A)}$$

Dette er også rigtig men ikke hele sandheden. Vi kan på baggrund af ovenstående vise at dette er sandt, men definitionen ”starter” ikke her.

Betragt trekant 1 og trekant 2, her må formindskelsesfaktoren (trekanten bliver mindre) være:

$$k = \frac{\cos(A)}{1} = \cos(A)$$

Derfor må der gælde, at:

$$\cos(A) \cdot \tan(A) = \sin(A)$$

$$\tan(A) = \frac{\sin(A)}{\cos(A)}$$

Vi kunne have vist det samme ved at bruge samme indre forhold i stedet for forstørrelsesfaktoren.

Brug i praksis

Vi kan bruge de tre trigonometriske funktioner knyttet an til retvinklede trekanter (og kun retvinklede) når vi kender to sider og skal bestemme en vinkel eller kender en vinkel og en side og skal bestemme en ukendt side.

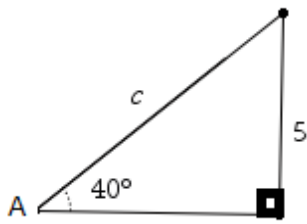
Her er et lille hjælpe-ark:

Kender		Skal finde	Formel
Vinkel	Modstående side	Hypotenusen	$\frac{\text{modstående}}{\sin(\text{vinkel})}$
Vinkel	Hypotenusen	Modstående side	$\text{hypotenusen} \cdot \sin(\text{vinkel})$
Modstående side	Hypotenusen	Vinkel	$\sin^{-1}\left(\frac{\text{modstående}}{\text{hypotenusen}}\right)$
Vinkel	Hosliggende side	hypotenusen	$\frac{\text{hosliggende}}{\cos(\text{vinkel})}$
Vinkel	Hypotenusen	Hosliggende side	$\text{hypotenusen} \cdot \cos(\text{vinkel})$
Hosliggende side	Hypotenusen	vinkel	$\cos^{-1}\left(\frac{\text{hosliggende}}{\text{hypotenusen}}\right)$
Vinkel	Modstående side	Hosliggende side	$\frac{\text{modstående}}{\tan(\text{vinkel})}$
Vinkel	Hosliggende side	Modstående side	$\text{hosliggende} \cdot \tan(\text{vinkel})$
Modstående side	Hosliggende side	vinkel	$\tan^{-1}\left(\frac{\text{modstående}}{\text{hosliggende}}\right)$

Eksempel 1:

I en retvinklet trekant (vinkel C er ret) kendes $A = 40^\circ$ og siden $a = 5$. Bestem længden af siden c.

Vi starter med en skitse af situationen:



Nu skal vi gennemskue hvilken ”stykker” vi kender og hvilken vi skal bestemme.

Vi kender vinkel A som er 40° og den modstående katete, a, som er 5.

Vi skal bestemme hypotenusen c.

Vi ser altså på denne situation:

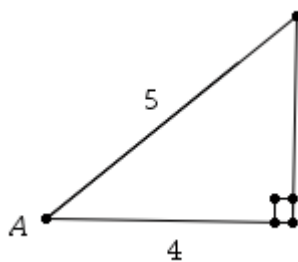
Kender		Skal finde	Formel
Vinkel	Modstående side	Hypotenusen	$\frac{\text{modstående}}{\sin(\text{vinkel})}$

$$c = \frac{5}{\sin(40)} \approx 7.77862$$

Eksempel 2.

I en retvinklet trekant (vinkel C er ret) kendes siden $b = 4$ og siden $c = 5$. Bestem størrelsen af vinklen A.

Vi starter med en skitse:



Nu skal vi gennemskue hvilken ”stykker” vi kender og hvilken vi skal bestemme.

Vi kender den hosliggende katete, b, som er 4 og hypotenusen, c, som er 5.

Vi skal bestemme vinklen A.

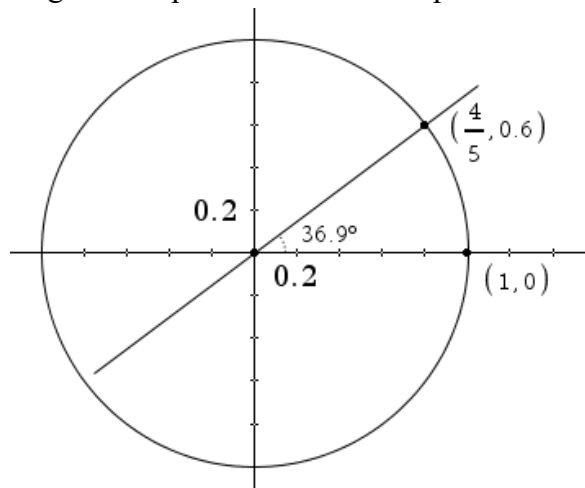
Kender		Skal finde	Formel
Hosliggende side	Hypotenusen	vinkel	$\cos^{-1}\left(\frac{\text{hosliggende}}{\text{hypotenusen}}\right)$

$$A = \cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) \approx 36,8699^\circ$$

Hvad er nu $\cos^{-1}()$?

$\cos^{-1}()$ er den modsatte funktion af $\cos()$ også kaldet invers cosinus.

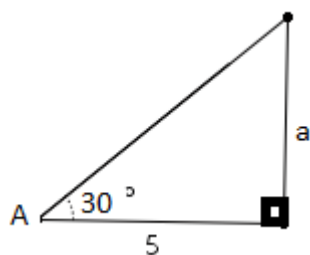
Vi går fra et punkt's x-koordinat på enhedscirklen til en vinkel:



Eksempel 3:

I en retvinklet trekant (vinkel C er ret) kendes vinklen $A = 30^\circ$ og siden $b = 5$. Bestem længden af siden a .

Vi starter med en skitse af situationen:



Nu skal vi gennemskue hvilken ”stykker” vi kender og hvilken vi skal bestemme.

Vi kender vinkel A som er 30° og den hosliggende katete, b , som er 5.

Vi skal bestemme den modstående katete a .

Kender		Skal finde	Formel
Vinkel	Hosliggende side	Modstående side	$\text{hosliggende} \cdot \tan(\text{vinkel})$

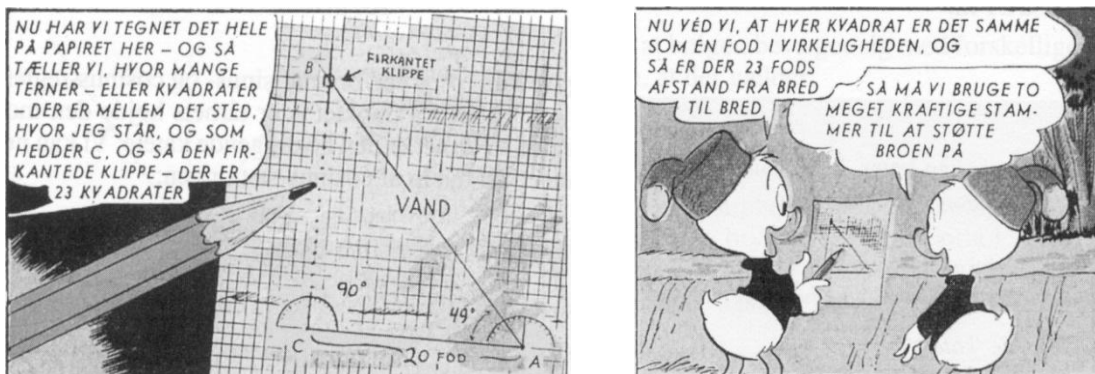
$$a = 5 \cdot \tan(30) = \frac{5}{\sqrt{3}} \approx 2.8867$$

Opgave 5:

Trigonometri benyttes meget til landmåling (hvilket også vil fremgå senere). Som et simpelt eksempel vil vi nu se nærmere på det følgende problem, hvor Rip, Rap og Rup skal bestemme bredden af en å:



Her kender vi altså den ene katete b , som er 20 fod, og søger den anden katete a , som er åens bredde. Da vi også har opmålt vinklerne, kan vi i praksis løse problemet ved hjælp af en målebordstegning:



Åens bredde er 23 fod ifølge general Rips målebordstegning.

- a) Gør ved beregning rede for at det er korrekt.

Opgave 6:

Trekant ABC er retvinklet med $C = 90^\circ$.

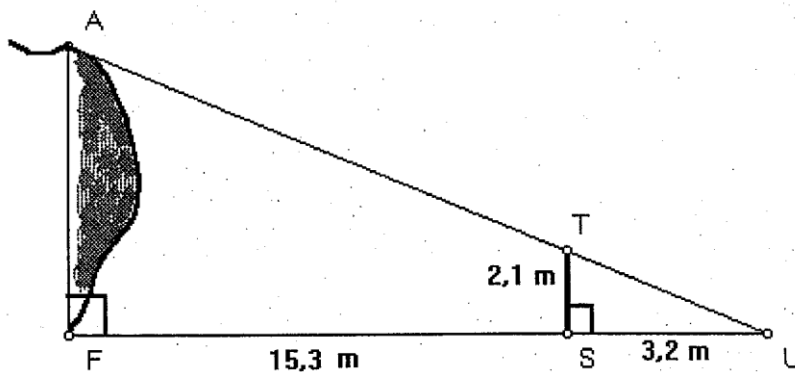
Beregn de manglende sider og vinkler, når:

- a) $A = 43^\circ$ og $c = 5$
- b) $B = 25^\circ$ og $a = 19$
- c) $c = 12.643$ og $b = 4.719$

Opgave 7:

Hvor mange grader står solen over horisonten, når en 15 m høj flagstang kaster en skygge på 29 m?

Opgave 8:



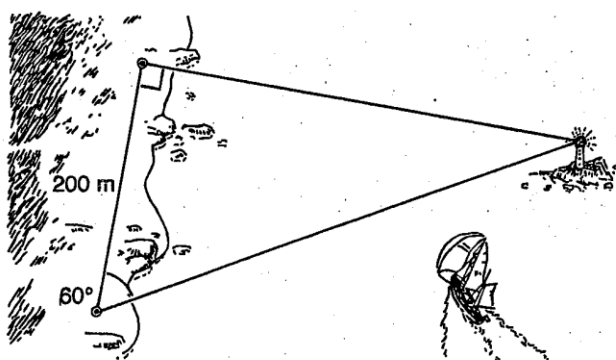
Figuren viser en klippevæg, hvis højde $|AF|$ man ønsker at bestemme.

En stok ST er anbragt således, at sigtelinjen fra udgangspunktet U gennem T rammer klippens top A. Stokken står vinkelret på linjen, der forbinder U og F.

Beregn klippevæggens højde på grundlag af de på figuren opgivne mål.

Opgave 9:

Ude i vandet ligger dødemandsklippen med sit fyrtårn, der skal advare skibene mod at komme for nær. Hvor langt væk fra kysten ligger dødemandsklippen? (den vinkelrette afstand er altid den korteste)



Opgave 10:

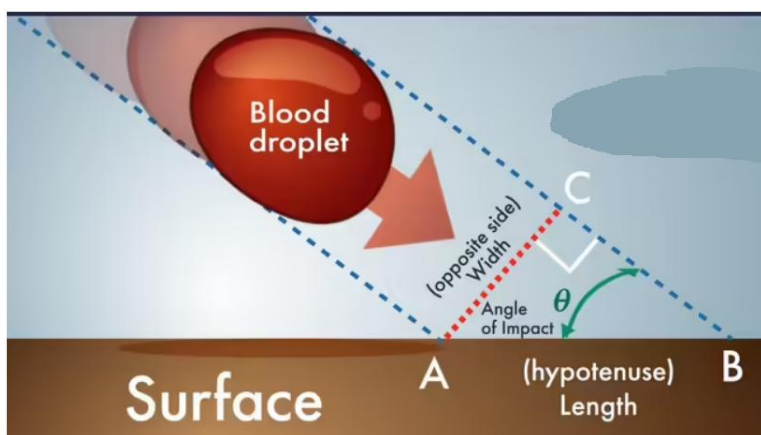
I en retvinklet trekant er $C = 90^\circ$. Hver linje i nedenstående skema repræsenterer opgivne størrelser i en retvinklet trekant. Udfyld de tomme rubrikker i skemaet:

A	B	a	b	c
		23	35	
			76	102
	73°			25.78
56°		34.1		
	18.32°	9.46		
	19°		57	
72°				176

Vender tilbage til Blood spatter trigonometry

Vi vender nu tilbage til *blood spatter trigonometry* for at forklare hvorfor vi brugte de formler vi gjorde.

På side 5 blev i præsenteret for dette billede.

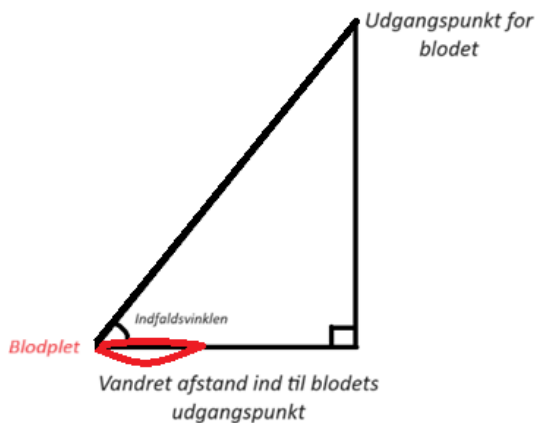


Billedet illustrerer en bloddråbe som rammer jorden skråt. Bloddråbens bredde kommer til at svare til den retvinklede trekants ene katete (AC) mens dens længde kommer til at repræsentere trekantens hypotenuse (AB). Da vi ønsker at bestemme indfaldsvinklen (B) ved vi nu at denne kan bestemmes ved brug af sinus til en vinkel.

$$B = \sin^{-1} \left(\frac{\text{bredden}}{\text{længden}} \right)$$

Det er begrundelsen for brug af denne formel.

På side 7 blev i præsenteret for dette billede.



Her ønsker vi at bestemme højden for dråbens udgangspunkt.

Vi kender indfaldsvinklen og vi kender den vandrette afstand ind til ”blodlinjernes skæringspunkt” og skal bestemme højden.

Vi ved nu at dette kan gøres ved brug af tangens til en vinkel.

$$\text{højden} = \text{vandrette afstand} \cdot \tan(\text{indfaldsvinkel})$$

Dette var begrundelserne for formlerne brugt i den praktiske del omkring **blood spatter trigonometry**.

Nu er I klar til at arbejde i politiets kriminalteknisk afdeling når det handler om at stedfæste hvorfra en blodplet stammer fra i rummet 😊

Vilkårlige trekanter.

Men hvad gør man/har man gjort når man ikke kunne danne retvinklede trekanter?

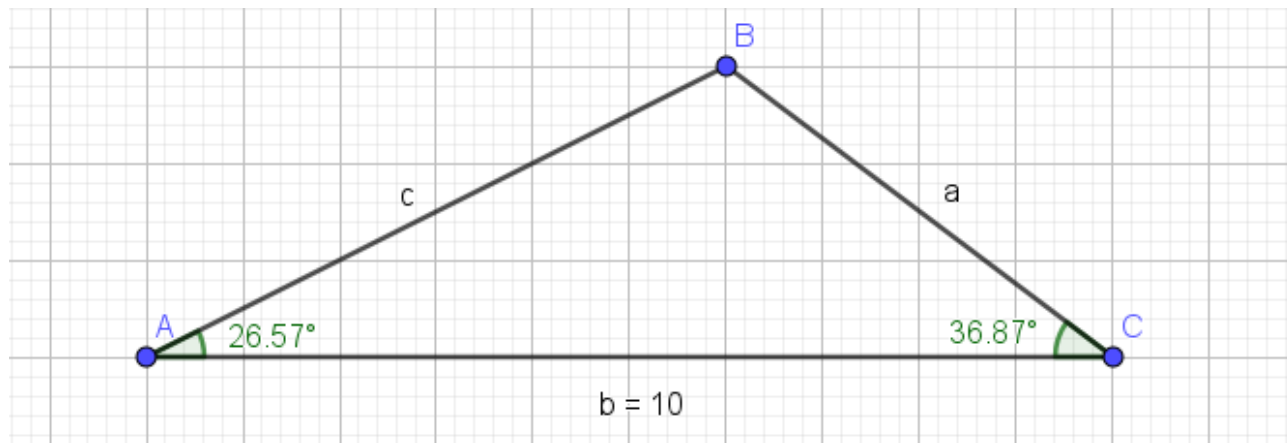
Ja, det er et centralt spørgsmål at stille. For selvom det at regne på retvinklede trekanter er nemt og at foretrække, så kan vi ikke altid kun bruge værktøjer omhandlende denne type trekant. For historien (og nutiden) har vist, at det ikke altid er muligt at konverterer trigonometriske problemstillinger til retvinklede trekanter.

Vi bliver også nødt til at kunne håndtere vilkårlige trekanter (alle typer trekanter).

Indtil nu har vi set på to ”redskaber” til at håndtere disse.

- Vinkelsummen i en trekant er altid 180^0 .
- Ensvinklede trekanter kan bestemmes ud fra principperne *samme indre forhold* eller *forstørrelses-/formindskelsesfaktor*.

Men hvad gør man hvis man ser følgende trekant?



Vi kan sagtens bestemme den sidste vinkel (B):

$$B = 180^0 - 26,57^0 - 36,87^0 = 116,56^0$$

Men de to manglende sider, *a* og *c*, kan vi ikke umiddelbart bestemme med de redskaber vi har på nuværende tidspunkt.

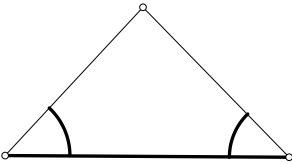
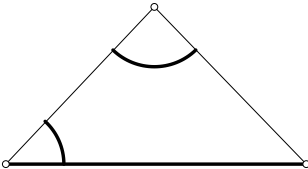
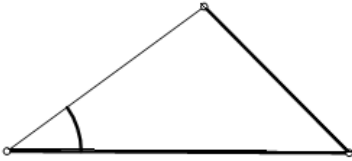
Der er to metoder til at håndtere ovenstående problemstilling.

Enten kan vi **konstruere** (tegne) os frem til løsningen eller også kan vi beregne os frem til løsningen. Det sidste er supplerende stof, så det tager vi til sidst.

Trekantskonstruktion

Der er 5 trekantstilfælde i skal kunne konstruere - De såkaldte **5 trekantstilfælde**.

Første trekanttilfælde		Givet: De tre sider
Andet trekanttilfælde		Givet: En vinkel og de to hosliggende sider

Tredje trekanttilfælde		Givet: En side og de to hosliggende vinkler
Fjerde trekanttilfælde		Givet: En side, en hosliggende vinkel og den modstående vinkel
Femte trekanttilfælde		Givet: En vinkel, en hosliggende side og den modstående side

Konstruktion af de fem trekantstilfælde vises på video. Man kan vælge at bruge nspire, Geogebra eller prøve begge dele.

Følg følgende link:

1.trekantstilfælde - nspire:

<https://www.youtube.com/watch?v=hHGeflBvDaw>

1.trekantstilfælde - GeoGebra:

<https://www.youtube.com/watch?v=agsxI8p792M>

2.trekantstilfælde - nspire:

<https://www.youtube.com/watch?v=37SMApHNjWE>

2.trekantstilfælde - Geogebra:

https://www.youtube.com/watch?v=Cuh9IBROX_c

3. og 4. trekantstilfælde kan håndteres på samme måde, hvis man i 4.trekantstilfælde bare finder den sidste vinkel vha. vinkelsummen på 180^0 . Derfor er der kun én video her.

3. (og 4.) trekantstilfælde - nspire:

<https://www.youtube.com/watch?v=GqwPztg2YgQ>

3. (og 4) trekantstilfælde - GeoGebra:

<https://www.youtube.com/watch?v=ji4c5jE4LWc>

5 trekantstilfælde er lidt speciel fordi man kan risikere at stå med to trekanter som opfylder de betingelser som oplyses. Altså en given opgave har to løsninger. Men uanset hvad er metoden den samme. Her vises to eksempler, hvor den første kun har en løsning mens det andet har to.

5.trekantstilfælde - nspire: (én løsning)

<https://www.youtube.com/watch?v=2YjL6QMuGMg>

5.trekantstilfælde - GeoGebra: (én løsning)

<https://www.youtube.com/watch?v=BHwLWDqmzPc>

5.trekantstilfælde - nspire: (to løsninger)

<https://www.youtube.com/watch?v=reHc3FHiFn8>

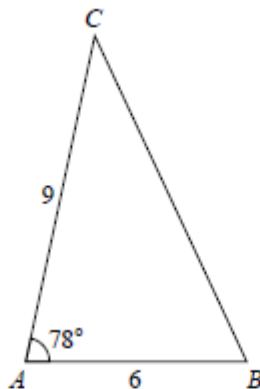
Den sidste vises kun i nspire, da metoden egentlig er den samme som for tilfældet med én løsning. Derfor er tanken med den sidste kun at gøre opmærksom på at der kan være to løsninger til en sådan opgave.

Hvad er kravet til den skriftlige eksamen?

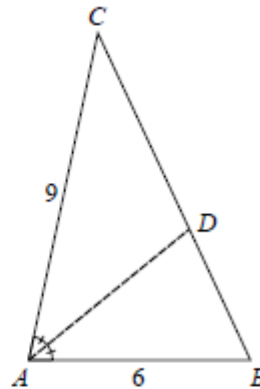
Her gennemgås en tidligere eksamensopgave for at I bliver klogere på hvad kravet er til den skriftlige eksamen (til terminsprøven og i afleveringer)

Opgaven ser ud på følgende måde:

Opgave 8



Figur 1



Figur 2

Figur 1 viser trekant ABC. Nogle af trekantens mål fremgår af figuren.

(10 point)

a) Konstruer en målfast tegning af trekant ABC, og forklar konstruktionen.

Vinkelhalveringslinjen for A skærer siden BC i punktet D, se figur 2.

(10 point)

b) Bestem længden af linjestykket BD.

Det første man gør er, uanset om det er med eller uden hjælpemidler, at man laver en indledning.

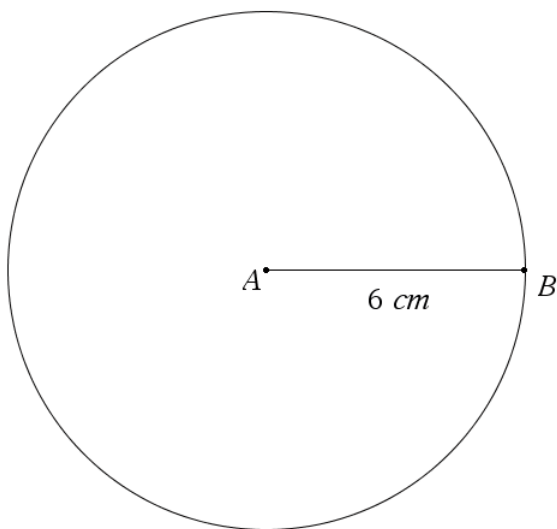
Det bedste er selvfølgelig at skrive en indledning selv, men man kan også vælge at klippe opgaveformuleringen ind. Husk at 8a) er en selvstændig opgave, så b) må ikke være med i indklippet.

Opgave 8:

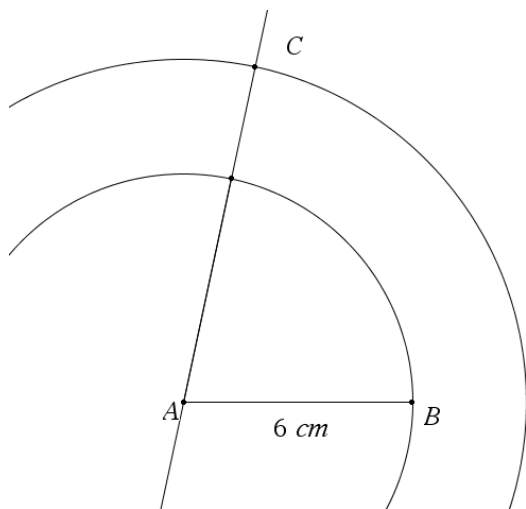
Jeg betragter en trekant ABC, hvor vi får oplyst at $A = 78^\circ$, $b = 9$ og $c = 6$.

- a) Jeg skal konstruere en målfast tegning af trekant ABC.

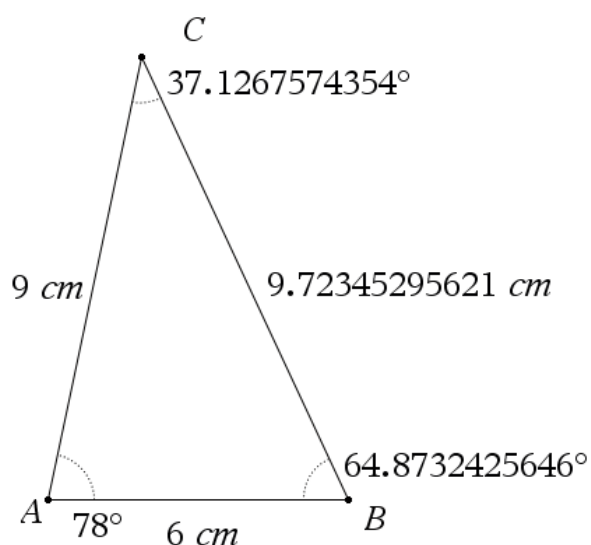
Først tegnes grundlinjen c, linjestykke AB, ved at tegne en cirkel med længden 6.



Herefter tegnes en cirkel med en længde på 9, linjestykket AB drejes med en vinkel på 78° og det nye linjestykke forlænges indtil skæringspunktet C kan dannes.



Vi kan nu tegne trekant ABC.

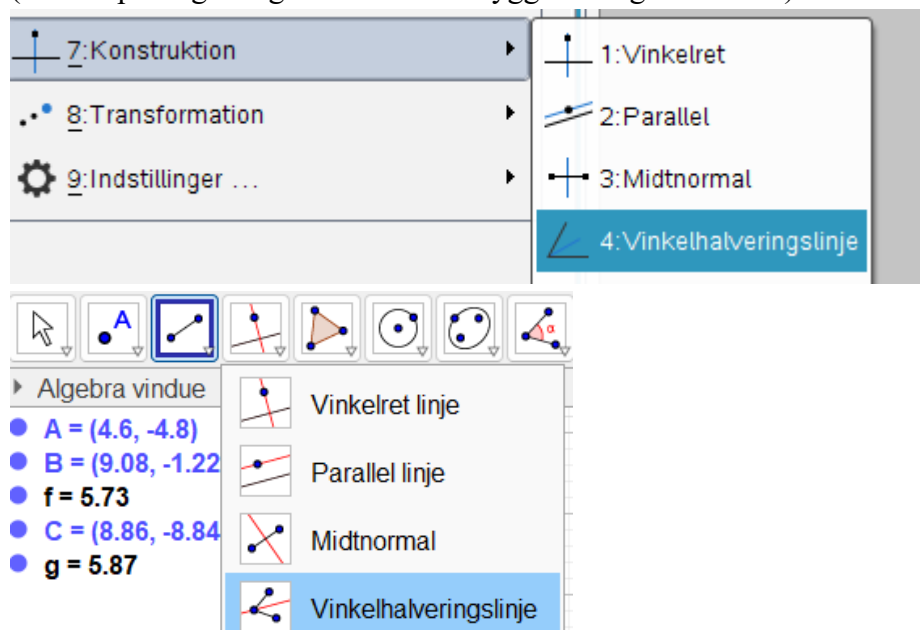


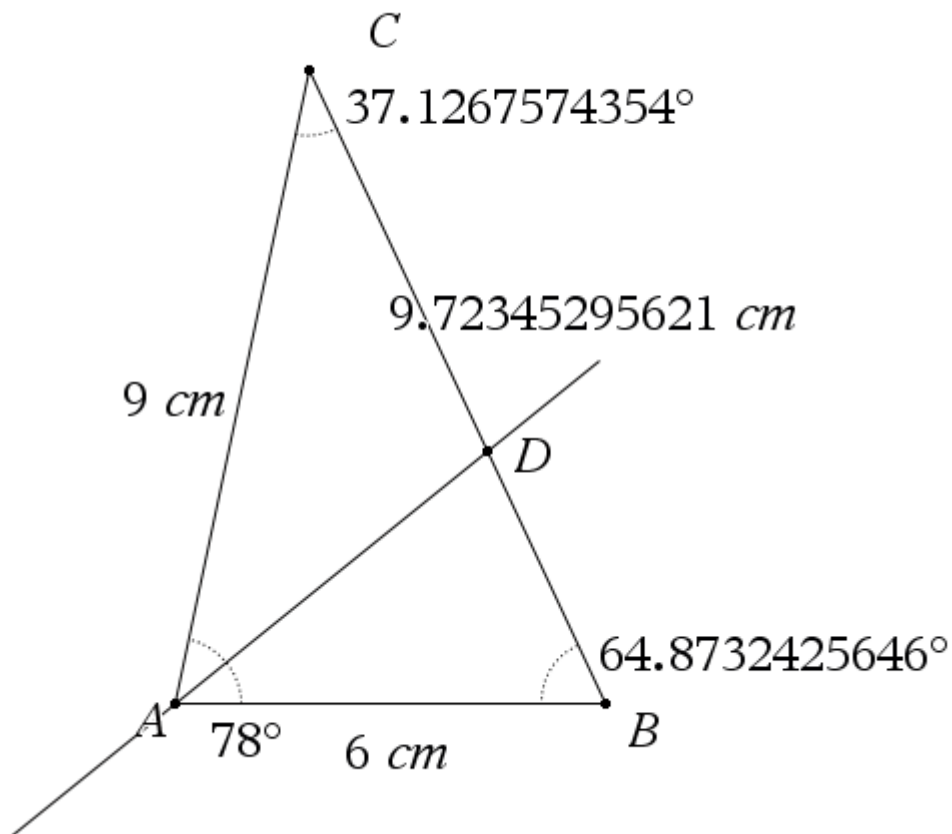
Vinkelhalveringslinjen for A skærer siden BC i punktet D.

b) Vi skal bestemme længden af linjestykket BD.

Først tegnes vinkelhalveringslinjen for A.

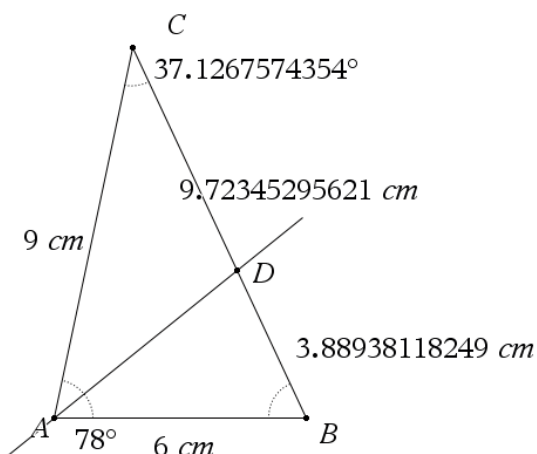
(både nspire og Geogebra har en indbygget mulighed for det)





(instruktion, jeg trykkede på "vinkelhalveringslinje" og herefter på punkterne B, A, C i den rækkefølge. Herefter vælges skæringspunkt mellem vinkelhalveringslinjen og linjestykket BC).

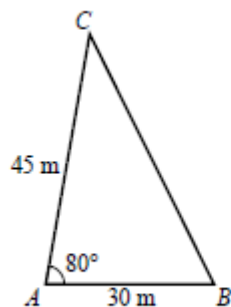
Nu måles længden af linjestykket BD (instruktion, mål afstanden mellem de to punkter)



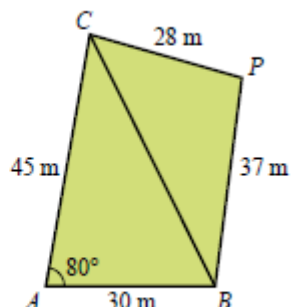
Vi kan konkludere, at afstanden BD ca. er 3,89 (benævnelse ukendt).

Dette var et eksempel på hvad man skal gøre til eksamen, terminsprøven og i afleveringerne. I behøver ikke at, men må gerne, løse de næste opgaver lige så udførligt.

Opgave 11:



Figur 1



Figur 2

Figur 1 viser en trekant ABC . Nogle af målene fremgår af figuren.

- a) Konstruér en målfast tegning af trekant ABC (til eksamen vil der stå **og forklar figuren**)

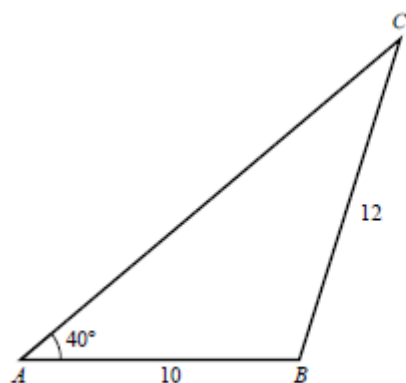
Figur 2 viser en firkantet byggegrund $ABPC$. Trekant ABC er en del af byggegrunden.

- b) Bestem arealet af byggegrunden $ABPC$.

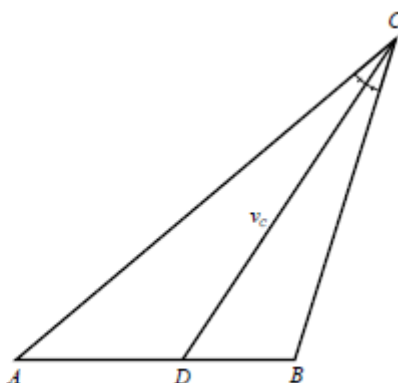
Både nspire og GeoGebra kan bestemme areal for jer. Men det kræver at I først tegner et polygon.

The screenshot shows the GeoGebra software interface. On the left, there is a sidebar with icons for '5:Figurer', '6:Målinger', '7:Konstruktion', and '8:Transformation'. The '5:Figurer' icon is selected, and a dropdown menu is open showing options: '1:Cirkel', '2:Trekant', '3:Løst rektangel', and '4:Polygon'. The '4:Polygon' option is highlighted. Below this, another dropdown menu is open for '6:Målinger', showing options: '1:Længde' and '2:Areal'. The '2:Areal' option is highlighted. At the bottom, there is a toolbar with various icons. A tooltip is visible over the 'Polygon' icon, which says 'Polygon' and 'Select all vertices, then first vertex again'. To the right of the tooltip, the text '(arealet gives automatisk)' is written.

Opgave 12:



Figur 1



Figur 2

Figur 1 viser trekant ABC , hvor $\angle A = 40^\circ$, $|AB| = 10$ og $|BC| = 12$.

- a) Konstruér en målfast tegning af trekant ABC .

Figur 2 viser igen trekant ABC , hvor vinkelhalveringslinjen v_C er tegnet.

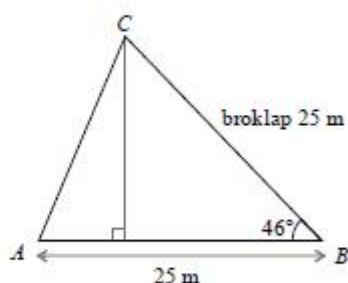
Punktet D er skæringspunktet mellem v_C og siden AB .

- b) Bestem længden af linjestykket BD .

Opgave 13:



Figur 1: Klapbro
Billedkilde: cloudfront.net



Figur 2

Figur 1 viser en 25 meter lang broklap, der er løftet 46° op.

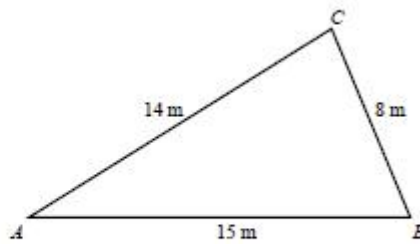
Figur 2 viser en model af situationen.

- a) Konstruér en målfast tegning af trekant ABC .
b) Hvor højt er broklappens endepunkt C løftet over siden AB ?

Opgave 14:



Figur 1: Trekantet havebed
Billedkilde: gardenoutline.com



Figur 2: Model af havebed

Figur 1 viser et havebed, der har form som en trekant. Figur 2 viser en model af havebedet. Nogle af målene fremgår af figuren.

- Konstruér en målfast tegning af trekant ABC .
- Bestem arealet af trekanten.

I det gamle Egypten bestem man arealet af en trekant ved først at udregne halvdelen af korteste side og herefter gange dette tal med gennemsnittet af de to længste sider.

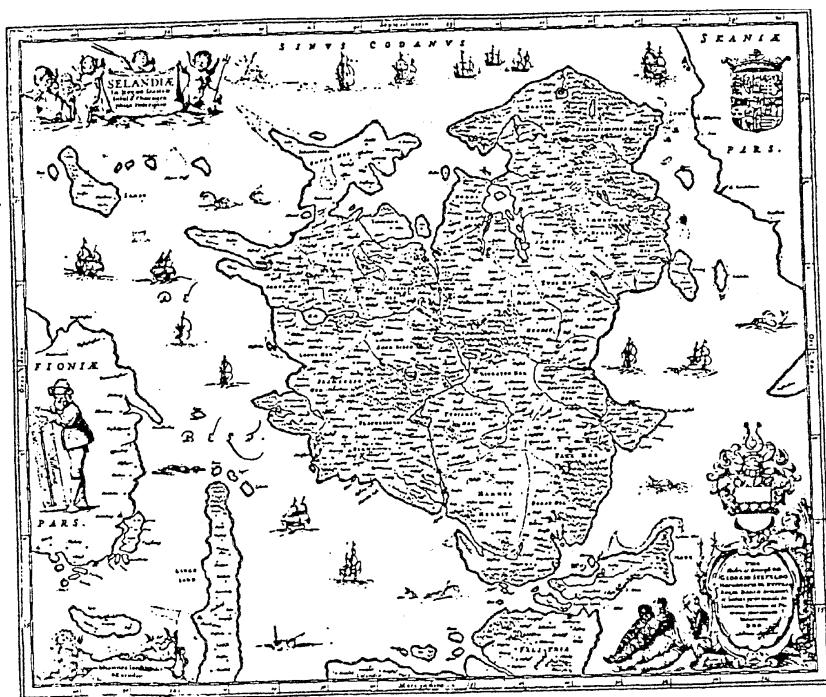
- Benyt egypternes metode til at bestemme arealet af trekant ABC , og vurdér anvendeligheden af metoden i dette tilfælde.

Supplerende stof - triangulering og sinusrelationen.

Lidt historisk indføring.

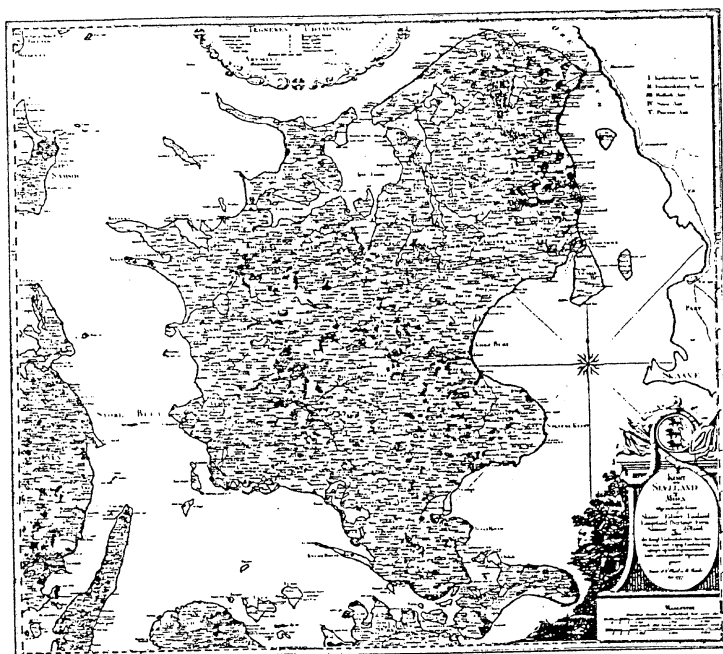
Danmarkskortet ledet af Thomas Bugge.

På Danmarkskort, der er fra tiden før 1750, er det let at finde adskillige fejl. Disse unøjagtigheder på de gamle kort skyldes sjældent, at kystlinjerne har ændret sig så meget, efter at kortene blev tegnet, men derimod at udarbejdelsen af kortene beroede på unøjagtige beretninger eller utilstrækkeligt opmålingsarbejde.



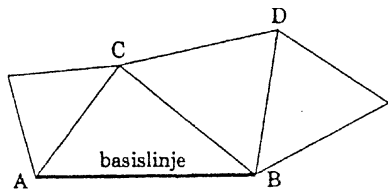
Kort over Sjælland i Janssonius' "Atlas Novus", 1647.

I sidste del af 1700-tallet tog man i Danmark en ny opmålingsmetode i brug, den såkaldte **triangulation**. Det var det dengang nystiftede »Videnskabernes Selskab«, der tog initiativer i forbindelse med den nye opmålingsmetode. Og i 1769-1842 udgav selskabet 24 kortblade omfattende hele Danmark. Og nu kom Danmarks kortet til at ligne Danmark.



Videnskabernes Selskabs kort over Sjælland, 1777. Copyright.

Den nye opmålingsmetode, **triangulationen**, bestod i, at man opdelte landet i nogle store trekanter. I praksis nøjedes man dog med at udvælge nogle trekantshjørner i landskabet, så det var muligt at sigte direkte fra et hjørne til alle nabohjørnerne. Man kunne nu nøjes med at måle længden af én



trekantside, kaldet **basislinjen**, samt alle trekantsvinkler. Ved trigonometriske beregninger kunne man derefter bestemme afstande mellem de øvrige trekantshjørner.

Øvelse 4

Svarende til ovenstående figur opgives følgende:

Længden af basislinjen AB er 12.416 m.

$\angle ABC = 62,462^\circ$ (vinkel B i trekant ABC), $\angle BAC = 57,832^\circ$, $\angle CBD = 81,328^\circ$ og $\angle BDC = 48,7360^\circ$.

Konstruér en målfast tegning af situationen og bestem længderne: $|BC|$, $|BD|$ og $|AD|$.

Arbejdet med den første triangulation af Danmark blev ledet af Thomas Bugge, der i 1764 lod opmåle en 14.515 alen (knap 10 km) lang basislinje fra Tinghøj (ved Mørkhøj) til Brøndby Høj (ved Brøndbyøster) uden for det daværende København. Basislinjens endepunkter dannede sammen med Rundetårn den første trekant i triangulationsnettet. Fra København blev triangulationen ført videre ud over Sjælland.

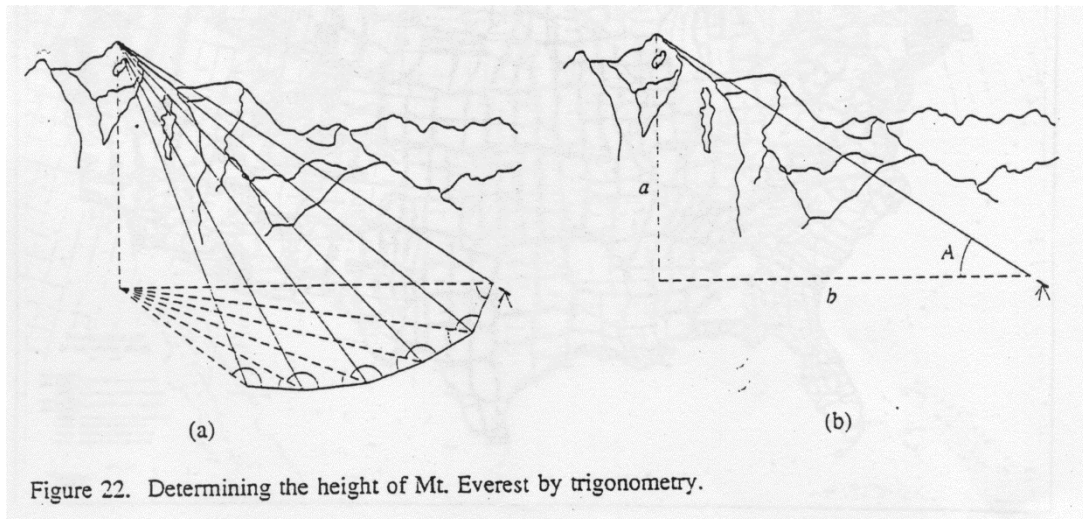
Hvis du ønsker at vide mere om Thomas Bugge og hans opmåling så omhandler dokumentaren ”*Metermandens trekanter*” netop om dette.

Mount Everest -Den store Kortlægning af Indien

Efter 1750 påbegyndte mange Europæiske regeringer systematiske kortlægninger af deres lande. Da det britiske imperium også kom til at omfatte Indien begyndte en ung løjtnant, James Rennel, en systematisk kortlægning af Indien. Dette skulle blive et af alle tiders største geografiske projekter. Hans ‘Bengalske Atlas’, kortlagde kystlinjen og de sydlige provinser. Men det meste af det indre og de nordlige områder forblev ukendte. I 1801 begyndte William Lambton, så at skubbe kortlægningen nordpå ind i hjertet af kontinentet. Lambton døde af udmattelse i sit telt efter 17 års kortlægning af Indiens indre. Han blev efterfulgt af **George Everest**, en ung og ambitiøs kaptajn, som påtog sig arbejdet med en fanatisk udholdenhed. Everest ledte en ekspedition med et følge af bærere og landmålere gennem vanskeligt terræn fyldt med giftslanger, tigre og den farligste fjende af dem alle, malariamyggen. Femogtyve år senere havde han nået så langt nordpå at det meste af det indiske kontinent nu var kortlagt, og han kunne se Himalayabjergene i det fjerne. Hans svigtende helbred tvang ham da til at vende tilbage til England. Hans efterfølger Andrew Waugh udvidede kortlægningen henover det nordlige Indien frem til grænserne til Nepal, der dengang var lukket for fremmede.

I november 1849 rettede kaptajn James Nicholson, som var med på ekspeditionen, sin teodolit mod en fjern bjergtop fra forskellige målestationer på sletten nedenfor Himalayabjergene. Teodolitten målte højdevinklen, og sinusrelationerne gav afstandene til et punkt lige nedenunder bjergtoppen inde i det mægtige bjergmassiv. Herefter kunne højden af bjergtoppen findes ved hjælp af tangens:

$$a = b \cdot \tan(A)$$



Gennemsnittet af seks målinger førte til en højde på 29 002 fod, det højeste bjerg på Jorden. Det fik navn efter George Everest, for at hædre hans utrættelige arbejde med kortlægningen af Indien.

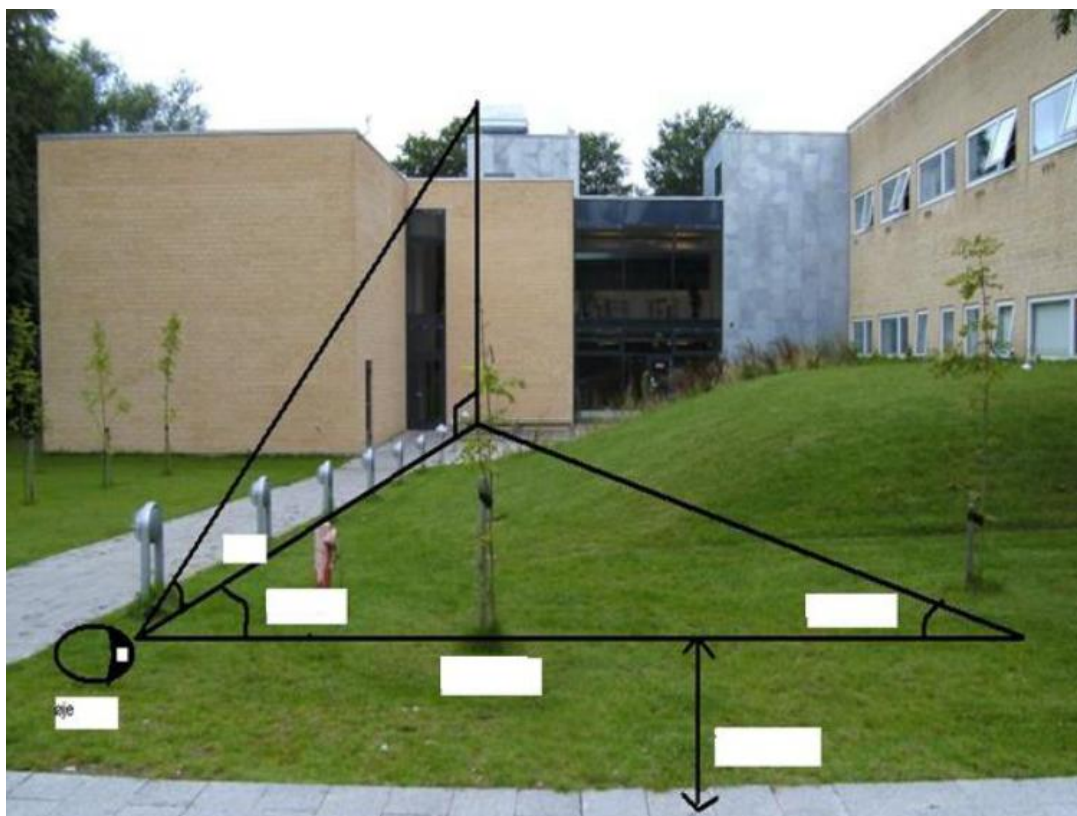
I 1920'erne blev Himalayabjergene tilgængelige fra Tibet, og landmålere med direkte adgang til foden af Mount Everest kunne nu bestemme dens højde til 29 028 fod, dvs. kun 26 fod højere end de oprindelige målinger foretaget i det foregående århundrede. På trods af det barske vejr og problemerne med at færdes i så store højder har adskillige ekspeditioner forsøgt en bestigning af Mount Everest. Adskillige forsøg i perioden 1921-1938 på at nå toppen fra den nordøstlige side slog alle fejl. Det samme gjaldt 3 forsøg på at nå toppen fra den sydlige side i perioden 1951-52. Først den 29 maj 1953 lykkedes det Edmund Hillary fra New Zealand og Tenzing Norgay fra Nepal at nå verdens top og sikre sig international berømmelse!

Den indiske kortlægning målte højden af Mt Everest baseret på et trigonometrisk netværk på sydsiden. Senere startede en uafhængig kinesisk kortlægning med udgangspunkt i Bohai bugten og nåede frem fra nordsiden. Den fandt inden for nogle få fod den samme højde for Mt. Everest. I dag har man gentaget målingerne med satellitter og dermed bekræftet nøjagtigheden af de traditionelle målinger ved hjælp af teodolitter og nivelleringsinstrumenter.

Øvelse 5

Som I har læst brugte George Everest også triangulering til at bestemme højden af Mount Everest. Han dannede først en vandret, vilkårlig trekant, for at bestemme længden af foden, siden, i den retvinklede trekant.

Dette princip ses af følgende billede.



Man skal forestille sig at den lodrette bagerste linje ”står” midt inde i bygningen.

Med en teodolit skal I nu bestemme basislinjen, og de tre vinkler. Desuden skal I notere højden på teodolitten.

Ved konstruktion skal I bestemme længderne i den vandrette, vilkårlige trekant, og herefter bestemme højden af ”luft-skakten” i toppen af gymnasiet.

Vilkårlig trekant - sinusrelationen.

Hvad gjorde George Everest og Thomas Bugge da de skulle bestemme længderne i trekantene? Konstruerede de sig også frem til svaret?

Svaret er nej. De beregnede sig frem til svaret, men hvordan gjorde de det?

De brugte relationerne, mere præcist *sinusrelationerne*.

Hvis man står med trekantstilfælde 3,4 eller 5, kan man bruge de såkaldte sinusrelationer til at bestemme ukendte sider.

Sinusrelationerne lyder:

$$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)}$$

Lad os kigge på øvelse 4 igen.

Her fik vi oplyst følgende:

Længden af basislinjen AB, svarende til c, er 12.416 m, $\angle B = 62,462^\circ$ og $\angle A = 57,832^\circ$

For at kunne bruge sinusrelationerne skal vi have et par. Med et par menes f.eks. side c og vinkel C.

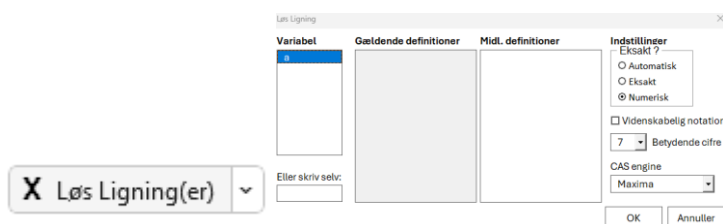
Vi starter derfor med at bestemme vinkel C:

$$C = 180^\circ - 62,462^\circ - 57,832^\circ = 59,706$$

Vi bestemmer nu siden a:

$$\frac{a}{\sin(57,832)} = \frac{12416}{\sin(59,706)}$$

Da vi ikke har kigget på *at isolere* endnu, lader vi bare wordmat om at løse den for os:



$$\frac{a}{\sin(57,832)} = \frac{12416}{\sin(59,706)}$$



Ligningen løses for a vha. WordMat.

$$a = 12172,16$$

Vi kunne gøre det samme i nspire. Her skulle man skrive:

$$\text{solve}\left(\frac{a}{\sin(57,832)} = \frac{12416}{\sin(59,706)}, a\right)$$

Vi kan herefter bestemme længden af b på samme måde:

$$\frac{b}{\sin(62,462)} = \frac{12416}{\sin(59,706)}$$



Ligningen løses for b vha. WordMat.

$$b = 12750,41$$

Opgave 15:

I $\triangle ABC$ er:

$$A = 73^\circ, C = 65^\circ \text{ og } a = 4.5$$

Bestem de manglende størrelser.

Opgave 16:

I $\triangle ABC$ er:

$$A = 73^{\circ}, C = 65^{\circ} \text{ og } b = 5.7$$

Bestem de manglende størrelser.

Opgave 17:

I den spidsvinklede $\triangle ABC$ er:

$$B = 82^{\circ}, b = 7 \text{ og } c = 6.55$$

Bestem de manglende størrelser.

Nu står nogle af jer måske tilbage med spørgsmålet, hvad gør man de resterende trekantstilfælde?

Svaret er at man bruger cosinusrelationerne, men dem griber man først fat i på b-niveau.

Vi slutter i stedet af med beviset for sinusrelationerne.

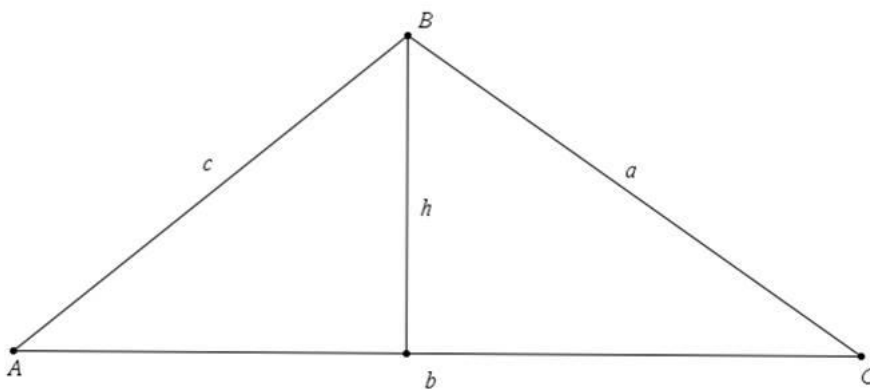
Bevis for sinusrelationerne

Sætning:

Sinusrelationerne:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

Bevis:



Vi tegner en vilkårlig trekant ABC.

Nu trækkes en højde h fra B til siden b, og får derved skabt to retvinklede trekanter.

Vi ved fra definitionen på "sinus til en vinkel" at:

$$\sin(A) = \frac{h}{c}$$

$$\sin(A) \cdot c = h$$

$$\sin(C) = \frac{h}{a}$$

$$\sin(C) \cdot a = h$$

Da h i begge udtryk er samme h må de to udtryk være ens, derfor:

$$\begin{aligned} a \cdot \sin C &= c \cdot \sin A \\ \frac{\sin A}{a} &= \frac{\sin C}{c} \end{aligned}$$

Hvis vi trækker de to andre højder, kan vi udlede resten af relationerne.

Wordmat

Flere af jer kender sikkert allerede til wordmat og ved godt, at denne word-udvidelse er et fremragende redskab.

Skal I installere den? Ja, det skal I. Den kan rigtig meget, som kan hjælpe jer til f.eks. eksamen.

Kan den også godt hjælpe en i forhold til trekantsberegninger? Ja, det kan den godt.

Men husk på, at man ikke lærer noget af at bruge den som sådan! I skal også selv kunne teorien og beregningerne bag.

Men den kan hjælpe jer til f.eks. at tjekke efter om jeres konstruktion er rigtig til eksamen.

Trekantsløser

Indsæt de kendte sider og vinkler så beregnes de resterende sider og vinkler, og indsættes på figur i Word. Figuren viser ikke de korrekte størrelser, men det gør den når den indsættes i Word.

Det er også muligt at ændre betegnelserne på figuren. Bare klik på bogstaverne.

Retvinklet?

- ☐ A Ret
- ☐ C Ret
- ☒ Vilkårlig

Navngivning

- ☐ Manuel
- ☒ Vinkler store, sider små bogstaver
- ☐ Sider navngives efter hjørner AB

☐ Indsæt tal på figuren i Word

☒ Vis mellemregninger i Word

Nulstil OK

Husk at sætte kryds ved vis udregninger.