

Modul 1: Fra virkelighed til variabel

Opgave 1.1

En nystartet tøjvirksomhed producerer to typer T-shirts: Model x (basis) og Model y (premium). Råvarerne til en basis-T-shirt koster 35 kr., og råvarerne til en premium-T-shirt koster 60 kr.

1. Hvad er de samlede råvareomkostninger, hvis virksomheden producerer 20 basis-T-shirts og 15 premium-T-shirts?
2. Opstil et generelt matematisk udtryk for de samlede råvareomkostninger K , når der produceres x stk. basis og y stk. premium.

Opgave 1.2

En lille juicebar sælger Ingefær-shots (x) og Selleri-juice (y). Et ingefær-shot sælges for 15 kr., og en selleri-juice sælges for 35 kr.

1. Bestem den samlede indtægt, hvis der sælges 40 ingefær-shots og 25 selleri-juice.
2. Opstil en funktion for den samlede omsætning (indtægt) $R(x, y)$ som funktion af antallet af solgte enheder x og y .

Opgave 1.3

En lille iværksættervirksomhed producerer håndlavede notesbøger i to udgaver: Lommeformat (x) og Kontorformat (y). Materialerne til en notesbog i lommeformat koster 15 kr., og materialerne til kontorformatet koster 28 kr.

1. Bestem de samlede materialeomkostninger, hvis der produceres 60 notesbøger i lommeformat og 40 i kontorformat.
2. Opstil en generel funktion for de samlede materialeomkostninger $M(x, y)$.

Opgave 1.4

Et lokalt cykeludlejningsfirma på Bornholm udlejer Mountainbikes (x) og Elcykler (y). Dagsprisen for at leje en mountainbike er 120 kr., og dagsprisen for en elcykel er 250 kr.

1. Hvad er firmaets samlede lejeindtægt på en dag, hvor 12 mountainbikes og 8 elcykler er udlejet?
2. Opstil en funktion for den samlede daglige omsætning $R(x, y)$.

Modul 2: Tid er penge (Isolering af y)

Opgave 2.1

Et cykelværksted reparerer almindelige cykler (x) og elcykler (y). Det tager 20 minutter at servicere en almindelig cykel og 40 minutter for en elcykel. Værkstedet har afsat præcis 400 minutter til rådighed i dag.

1. Opstil en ligning, der beskriver tidsforbruget ud fra de to variable x og y .
2. Isolér y i ligningen, så funktionen er klar til at blive indtastet i GeoGebra.
3. Hvor mange elcykler (y) kan værkstedet nå, hvis de vælger ikke at lave nogen almindelige cykler overhovedet?

Opgave 2.2

Isolér y i følgende begrænsningsligninger:

1. $3x + 2y = 120$
2. $5x + 10y = 500$

Opgave 2.3

En møbelpolstrer restaurerer gamle stole (x) og lænestole (y). Det tager i gennemsnit 3 timer at ombetrække en stol og 5 timer for en lænestole. Møbelpolstreren har maksimalt 60 arbejdstimer til rådighed i denne uge.

1. Opstil en tidsbegrænsningsligning med de to variable x og y .
2. Isolér y i ligningen, så den er klar til grafisk afbildning.
3. Hvis møbelpolstreren udelukkende vælger at fokusere på almindelige stole (x), hvor mange kan han så maksimalt nå at lave på ugen?

Opgave 2.4

Isolér y i følgende to begrænsningsligninger:

1. $4x + 8y = 160$
2. $6x + 3y = 90$

Modul 3: Spilleregler i start-up (Uligheder)

Opgave 3.1

En iværksætter har opstillet følgende to begrænsninger for sin produktion af to varer x og y :

$$\text{Tid: } 4x + 2y \leq 80$$

$$\text{Budget: } 10x + 20y \leq 400$$

Desuden gælder de ikke-negative begrænsninger $x \geq 0$ og $y \geq 0$.

1. Undersøg ved hjælp af manuel beregning (uden GeoGebra), om produktionsplanen $(x, y) = (10, 12)$ er mulig (lovlig).
2. Undersøg, om produktionsplanen $(x, y) = (15, 5)$ er mulig.

Opgave 3.2

Skitsér eller beskriv med ord, hvilket område i et koordinatsystem uligheden $y \leq -2x + 10$ dækker i første kvadrant (hvor $x \geq 0$ og $y \geq 0$).

Opgave 3.3

En café producerer to typer sandwiches til frokosttryk: Skinke/Ost (x) og Vegansk (y). De har opstillet to uligheder baseret på deres råvarer (kød/ost og grøntsager):

$$\text{Råvare 1: } 2x + 4y \leq 100$$

$$\text{Råvare 2: } 5x + 2y \leq 130$$

Hertil gælder som altid $x \geq 0$ og $y \geq 0$.

1. Undersøg ved beregning, om det er muligt for caféen at lave en produktionsplan, der hedder $(x, y) = (20, 10)$.
2. Undersøg, om produktionsplanen $(x, y) = (15, 20)$ overholder begge begrænsninger.

Opgave 3.4

En ulighed for et lagerbudget er givet ved $20x + 10y \leq 500$.

1. Omskriv uligheden til formen $y \leq ax + b$.
2. Find linjens skæringspunkter med henholdsvis x -aksen og y -aksen (husk at $x \geq 0$ og $y \geq 0$).

Modul 4: Jagten på profit (Kriteriefunktion og niveaulinjer)

Opgave 4.1

En virksomhed producerer to typer computerspil. Overskuddet er 40 kr. pr. stk. for spil x og 60 kr. pr. stk. for spil y .

1. Opstil kriteriefunktionen for det samlede overskud $O(x, y)$.
2. Opstil ligningen for den niveaulinje, der svarer til et samlet overskud på præcis 2.400 kr., og isoler y .
3. Hvis vi ønsker at øge overskuddet til 3.600 kr., hvad sker der så med niveaulinjens placering i koordinatsystemet? (Sker der en ændring i hældningen?)

Opgave 4.2

En mindre møbelvirksomhed producerer to typer reoler: Model Birk (x) og Model Eg (y). Overskuddet er 150 kr. pr. solgt Birk-reol og 250 kr. pr. solgt Eg-reol.

1. Opstil kriteriefunktionen for det samlede overskud $O(x, y)$.
2. Virksomheden sætter et mål om at nå et overskud på præcis 3.000 kr. i dag. Opstil ligningen for denne niveaulinje, og isoler y .
3. Bestem hældningskoefficienten for niveaulinjen. Hvad fortæller denne hældning om forholdet mellem de to reoltyper, hvis overskuddet skal holdes konstant?

Opgave 4.3

En webshop sælger to typer trådløse høretelefoner: Budget (x) og Premium (y). Overskudsfunctioen er givet ved $O(x, y) = 80x + 120y$.

1. Isolér y i ligningen for niveaulinjen svarende til et overskud på $k = 4.800$ kr.
2. Webshoppen ønsker at undersøge en højere profitlinje, hvor $k = 7.200$ kr. Isolér y for denne nye linje.
3. Sammenlign de to linjer: Hvordan har de ændret placering i koordinatsystemet, og hvad er der sket med deres hældning?

Opgave 4.4

Forklar med egne ord (eller vis med et lille fiktivt eksempel), hvorfor man kalder $10x + 20y = k$ for en *niveaulinje*, når man ændrer på værdien af k .

Modul 5: Bundlinjen (Hjørnepunkter)

Opgave 5.1

Et polygonområde (det mulige område) har følgende fire hjørnepunkter: $A(0, 0)$, $B(0, 30)$, $C(15, 20)$ og $D(25, 0)$. Kriteriefunktionen for overskuddet er givet ved:

$$O(x, y) = 25x + 35y$$

1. Beregn overskuddet i hvert af de fire hjørnepunkter.
2. Hvilken produktionskombination (x, y) er optimal, og hvad er det maksimale overskud?

Opgave 5.2

Et muligt område (polygonområde) for en produktion er afgrænset af følgende fire hjørnepunkter: $A(0, 0)$, $B(0, 45)$, $C(30, 15)$ og $D(40, 0)$. Kriteriefunktionen for virksomhedens dækningsbidrag (overskud) er givet ved:

$$O(x, y) = 40x + 50y$$

1. Beregn overskuddet i de tre hjørnepunkter B , C og D .
2. Hvilket hjørnepunkt repræsenterer den optimale løsning, og hvad er det maksimale overskud?

Opgave 5.3

En iværksætter har fundet ud af, at hendes mulige produktionsområde har tre hjørner (udover $(0, 0)$): $P_1(0, 60)$, $P_2(20, 40)$ og $P_3(50, 0)$. Overskuddet på vare x er 30 kr., og overskuddet på vare y er 20 kr.

1. Opstil kriteriefunktionen.
2. Find det optimale produktionspunkt ved hjælp af hjørnepunktsætningen.
3. Hvis overskuddet på vare x pludselig falder til 10 kr. (mens vare y forbliver på 20 kr.), hvilket hjørnepunkt vil så være det mest optimale?

Opgave 5.4

Et polygonområde har hjørnerne $A(0, 0)$, $B(0, 25)$, $C(10, 20)$ og $D(20, 0)$. Kriteriefunktionen er $O(x, y) = 15x + 10y$.

1. Vis ved beregning, hvilket af hjørnepunkterne B , C eller D , der giver det største overskud.
2. Hvad sker der med valget af det optimale punkt, hvis kriteriefunktionen ændres til $O(x, y) = 10x + 15y$?

Modul 6: Hele pakken

Opgave 6.1: Kagebageriet

En HF-elev har startet et mikrobageri ved siden af studiet. Der bages to typer kager: Luksus-brownies (x) og Hindbærsnitte (y).

- **Tidsforbrug:** Det tager 3 minutter at færdiggøre en brownie og 1 minut for en hindbærsnitte. Der er maksimalt 180 minutter til rådighed.
 - **Råvareomkostninger:** En brownie koster 10 kr. i råvarer, og en hindbærsnitte koster 5 kr. Der kan maksimalt købes ind for 400 kr.
 - **Overskud:** Overskuddet (efter råvarer er betalt) er 15 kr. for en brownie og 10 kr. for en hindbærsnitte.
1. Opstil de to begrænsningsuligheder samt de ikke-negative begrænsninger for produktionen.
 2. Omskriv ulighederne til formen $y \leq ax + b$, så de kan indtegnes i GeoGebra.
 3. Opstil kriteriefunktionen $O(x, y)$ for bageriets overskud.
 4. Find hjørnepunkterne for det mulige område grafisk eller ved beregning (inklusive skæringspunktet mellem de to begrænsningslinjer).
 5. Bestem den optimale produktionsplan for eleven, og beregn det maksimale overskud.

Opgave 6.2: Iværksætterens Plakatprint

En grafisk start-up virksomhed producerer to typer plakater: Kunstprint (x) og Reklameplakater (y).

- **Blækforbrug:** Et kunstprint kræver 4 ml blæk, og en reklameplakat kræver 2 ml blæk. Der er maksimalt 240 ml blæk til rådighed i tankene.
 - **Tidsforbrug:** Det tager 1 minut at printe et kunstprint og 2 minutter for en reklameplakat. Printeren kan maksimalt køre i 180 minutter i dag.
 - **Overskud:** Overskuddet er 50 kr. pr. kunstprint og 40 kr. pr. reklameplakat.
1. Opstil begrænsningsulighederne samt de ikke-negative begrænsninger for produktionen.
 2. Omskriv ulighederne til formen $y \leq ax + b$.
 3. Opstil kriteriefunktionen $O(x, y)$.
 4. Find koordinaterne for alle hjørnepunkter i det mulige område.
 5. Hvilken produktionsplan giver det største overskud, og hvad lyder dette overskud på?

Opgave 6.3: Mobil-reparatøren

En studerende har startet en lille biks, der reparerer skærme (x) og udskifter batterier (y) på smartphones.

- **Arbejdstid:** En skærmreparation tager 30 minutter, og et batteriskift tager 15 minutter. Der er sat 300 minutter (5 timer) af til arbejdet.
- **Indkøbsbudget:** Reservedele til en skærm koster 100 kr., og dele til et batteri koster 100 kr. Der kan maksimalt købes ind for 800 kr.
- **Overskud:** Den studerende tjener 200 kr. i rent overskud pr. skærm og 150 kr. pr. batteri.

1. Opstil den samlede matematiske model (begrænsninger og kriteriefunktion).
2. Isolér y i ulighederne og bestem det mulige område grafisk.
3. Beregn overskuddet i alle områdets hjørnepunkter.
4. Giv en erhvervsøkonomisk vurdering: Kan det bedst betale sig kun at reparere skærme, kun skifte batterier, eller lave en kombination?

Opgave 6.4: Kaffevoغن på festivalen

To venner har lejet en kaffevogn til en lokal festival. De sælger Iskaffe (x) og Varm Latte (y).

- **Mælkebegrænsning:** En iskaffe bruger 2 dl mælk, og en varm latte bruger 3 dl mælk. De har i alt 120 dl mælk i køleskabet.
- **Tid:** Det tager 1 minut at lave en iskaffe og 1 minut at lave en varm latte. De har i alt 50 minutter i den travleste pause.
- **Overskud:** Overskuddet er 12 kr. for en iskaffe og 15 kr. for en varm latte.

1. Opstil ulighederne for mælk og tid, og omskriv dem til funktioner.
2. Find skæringspunktet mellem de to begrænsningslinjer.
3. Bestem ved hjælp af hjørnepunktsætningen, hvordan vennerne skal prioritere deres salg i pausen for at maksimere overskuddet.

Facitliste

Modul 1

Opgave 1.1: 1) $20 \cdot 35 + 15 \cdot 60 = 700 + 900 = 1.600$ kr.

2) $K(x, y) = 35x + 60y$

Opgave 1.2: 1) $40 \cdot 15 + 25 \cdot 35 = 600 + 875 = 1.475$ kr.

2) $R(x, y) = 15x + 35y$ **Opgave 1.3:**

1) $60 \cdot 15 + 40 \cdot 28 = 900 + 1.120 = 2.020$ kr.

2) $M(x, y) = 15x + 28y$

Opgave 1.4:

1) $12 \cdot 120 + 8 \cdot 250 = 1.440 + 2.000 = 3.440$ kr.

2) $R(x, y) = 120x + 250y$

Modul 2

Opgave 2.1: 1) $20x + 40y = 400$

2) $40y = -20x + 400 \iff y = -0,5x + 10$

3) Sættes $x = 0$, fås $y = -0,5(0) + 10 = 10$ elcykler.

Opgave 2.2: 1) $2y = -3x + 120 \iff y = -1,5x + 60$

2) $10y = -5x + 500 \iff y = -0,5x + 50$ **Opgave 2.3:**

1) $3x + 5y = 60$

2) $5y = -3x + 60 \iff y = -0,6x + 12$

3) Hvis $y = 0$, fås $3x = 60 \iff x = 20$ stole.

Opgave 2.4:

1) $8y = -4x + 160 \iff y = -0,5x + 20$

2) $3y = -6x + 90 \iff y = -2x + 30$

Modul 3

Opgave 3.1: 1) Tid: $4(10) + 2(12) = 40 + 24 = 64 \leq 80$ (OK). Budget: $10(10) + 20(12) = 100 + 240 = 340 \leq 400$ (OK). Punktet er **muligt**.

2) Tid: $4(15) + 2(5) = 60 + 10 = 70 \leq 80$ (OK). Budget: $10(15) + 20(5) = 150 + 100 = 250 \leq 400$ (OK). Punktet er **muligt**.

Opgave 3.2: Det er den trekant i 1. kvadrant, som afgrænses af koordinataksene og den rette linje, der skærer y -aksen i $(0, 10)$ og x -aksen i $(5, 0)$. Området ligger *under* linjen. **Opgave 3.3:**

1) Råvare 1: $2(20) + 4(10) = 40 + 40 = 80 \leq 100$ (OK). Råvare 2: $5(20) + 2(10) = 100 + 20 = 120 \leq 130$ (OK). Planen er **mulig**.

2) Råvare 1: $2(15) + 4(20) = 30 + 80 = 110 \not\leq 100$ (Dette bryder begrænsningen). Planen er **ikke mulig**.

Opgave 3.4:

1) $10y \leq -20x + 500 \iff y \leq -2x + 50$

2) Skæring med y -aksen findes ved $x = 0$, hvilket giver $(0, 50)$. Skæring med x -aksen findes ved $y = 0$, hvilket giver $0 = -2x + 50 \iff 2x = 50 \iff x = 25$, altså $(25, 0)$.

Modul 4

Opgave 4.1: 1) $O(x, y) = 40x + 60y$

2) $40x + 60y = 2400 \iff 60y = -40x + 2400 \iff y = -\frac{2}{3}x + 40$

3) Niveaulinjen parallelforskydes opad og mod højre. Hældningen forbliver uændret ($a = -\frac{2}{3}$). **Opgave 4.2:**

1) $O(x, y) = 150x + 250y$

2) $150x + 250y = 3000 \iff 250y = -150x + 3000 \iff y = -0,6x + 12$

3) Hældningen er $a = -0,6$. Den fortæller, at hvis vi vil producere 1 ekstra stk. af model Birk (x), skal vi fravælge 0,6 stk. af model Eg (y) for at bevare det samme samlede overskud på 3.000 kr.

Opgave 4.3:

1) $80x + 120y = 4800 \iff 120y = -80x + 4800 \iff y = -\frac{2}{3}x + 40$

2) $80x + 120y = 7200 \iff 120y = -80x + 7200 \iff y = -\frac{2}{3}x + 60$

3) Den nye linje er parallelforskydet opad og mod højre (skæringen med y -aksen er flyttet fra 40 til 60). Hældningen er nøjagtig den samme ($a = -\frac{2}{3}$), da prisforholdet mellem produkterne ikke har ændret sig.

Opgave 4.4: Det kaldes en niveaulinje, fordi alle punkter (x, y) på netop den linje befinder sig på samme "økonomiske niveau" (de giver samme resultat k). Når værdien af k ændres, flytter hele linjen sig parallelt op eller ned i koordinatsystemet som konturlinjer på et landkort.

Modul 5

Opgave 5.1: 1)

$O(A) = O(0, 0) = 0$ kr.

$O(B) = O(0, 30) = 25(0) + 35(30) = 1.050$ kr.

$O(C) = O(15, 20) = 25(15) + 35(20) = 375 + 700 = 1.075$ kr.

$O(D) = O(25, 0) = 25(25) + 35(0) = 625$ kr.

2) Den optimale produktionsplan er punkt **C**, dvs. 15 stk. af x og 20 stk. af y , hvilket giver det maksimale overskud på **1.075 kr.** **Opgave 5.2:**

1)

$O(B) = O(0, 45) = 40(0) + 50(45) = 2.250$ kr.

$O(C) = O(30, 15) = 40(30) + 50(15) = 1.200 + 750 = 1.950$ kr.

$O(D) = O(40, 0) = 40(40) + 50(0) = 1.600$ kr.

2) Det optimale punkt er **B**, hvilket vil sige at producere 0 enheder af x og 45 enheder af y . Det maksimale overskud er **2.250 kr.**

Opgave 5.3:

1) $O(x, y) = 30x + 20y$

2) Vi tester hjørnerne:

$O(0, 60) = 20 \cdot 60 = 1.200$ kr.

$O(20, 40) = 30(20) + 20(40) = 600 + 800 = 1.400$ kr.

$O(50, 0) = 30 \cdot 50 = 1.500$ kr.

Det optimale punkt er $P_3(50, 0)$ med et overskud på **1.500 kr.**

3) Med den nye funktion $O(x, y) = 10x + 20y$ bliver overskuddene: $O(P_1) = 1.200$ kr., $O(P_2) = 10(20) + 20(40) = 1.000$ kr., og $O(P_3) = 10 \cdot 50 = 500$ kr. Nu er det i stedet punktet $P_1(0, 60)$, der er det optimale.

Opgave 5.4:

1) Vi tester med $O(x, y) = 15x + 10y$:

$$O(0, 25) = 10 \cdot 25 = 250 \text{ kr.}$$

$$O(10, 20) = 15(10) + 10(20) = 150 + 200 = 350 \text{ kr.}$$

$$O(20, 0) = 15 \cdot 20 = 300 \text{ kr.}$$

Punkt **C** giver det største overskud (**350 kr.**).

2) Med den omvendte funktion $O(x, y) = 10x + 15y$ får vi:

$$O(0, 25) = 15 \cdot 25 = 375 \text{ kr.}$$

$$O(10, 20) = 10(10) + 15(20) = 100 + 300 = 400 \text{ kr.}$$

$$O(20, 0) = 10 \cdot 20 = 200 \text{ kr.}$$

Punkt **C** er stadig det mest optimale, men det maksimale overskud stiger til **400 kr.**

Modul 6

Opgave 6.1: 1) Tid: $3x + y \leq 180$, Budget: $10x + 5y \leq 400$, samt $x \geq 0, y \geq 0$.

2) Tid: $y \leq -3x + 180$, Budget: $5y \leq -10x + 400 \iff y \leq -2x + 80$.

3) $O(x, y) = 15x + 10y$.

4) Hjørnepunkterne findes ved arternes skæringer med akserne samt linjernes indbyrdes skæring ($-3x + 180 = -2x + 80 \iff x = 100$, hvilket giver et negativt y -punkt uden for 1. kvadrant).

Skæringerne med akserne for det begrænsede område giver hjørnerne: $A(0, 0)$, $B(0, 80)$ [fra budget], $C(50, 30)$ [skæring mellem linjer findes korrekt til $x = 50, y = 30$ da $3(50) + 30 = 180$ og $10(50) + 5(30) = 650$ hov – lad os løse ligningssystemet korrekt: $3x + y = 180 \implies y = 180 - 3x$. Indsættes i $10x + 5(180 - 3x) = 400 \implies 10x + 900 - 15x = 400 \implies -5x = -500 \implies x = 100$. Da $x = 100$ giver $y = -120$ skærer linjerne hinanden udenfor området. Det sande polygonområde er derfor begrænset af hjørnerne: $(0, 0)$, $(0, 80)$ samt tidslinjens skæring med x-aksen $(60, 0)$].

Lad os beregne overskuddet i de reelle hjørnepunkter:

$$O(0, 0) = 0 \text{ kr.}$$

$$O(0, 80) = 10 \cdot 80 = 800 \text{ kr.}$$

$$O(60, 0) = 15 \cdot 60 = 900 \text{ kr.}$$

5) Den optimale plan er at bage **60 Luksus-brownies og 0 Hindbærssnitter**, hvilket giver et maksimalt overskud på **900 kr.** (Her bruges al tiden, $3 \cdot 60 = 180$ min., mens der er penge i rest: $400 - 10 \cdot 60 = -200$ hov, $10 \cdot 60 = 600$ kr., hvilket overskrider budgettet på 400 kr.! Lad os korrigere: punktet $(60, 0)$ er ulovligt pga budgettet. Budgetlinjen skærer x-aksen i $(40, 0)$).

De sande lovlige hjørnepunkter er derved: $(0, 0)$, $(0, 80)$ og $(40, 0)$.

Vi tester overskuddet igen:

$$O(0, 80) = 800 \text{ kr.}$$

$$O(40, 0) = 15 \cdot 40 = 600 \text{ kr.}$$

Den optimale produktionsplan er at producere **0 brownies og 80 hindbærssnitter** for et maksimalt overskud på **800 kr.**